

UNIVERSIDAD PRIVADA ANTENOR ORREGO
ESCUELA DE POST GRADO
SECCION DE DOCTORADO EN EDUCACIÓN



**INFLUENCIA DEL MÉTODO HEURÍSTICO PARA LA
ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN
ALUMNOS DEL TERCER GRADO DE SECUNDARIA DEL
DISTRITO DE CAJABAMBA**

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTOR EN EDUCACIÓN

PRESENTADO POR:

NEMECIO MANUEL MEDINA ALIAGA

ASESOR: Dr. LORENZO E. MATOS DEZA

TRUJILLO- PERÚ

2013

UNIVERSIDAD PRIVADA ANTENOR ORREGO
ESCUELA DE POST GRADO
SECCION DE DOCTORADO EN EDUCACIÓN



**INFLUENCIA DEL MÉTODO HEURÍSTICO PARA LA
ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN
ALUMNOS DEL TERCER GRADO DE SECUNDARIA DEL
DISTRITO DE CAJABAMBA**

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTOR EN EDUCACIÓN

PRESENTADO POR:

NEMECIO MANUEL MEDINA ALIAGA

ASESOR: Dr. LORENZO E. MATOS DEZA

TRUJILLO- PERÚ

2013

Dedicatoria

A mi Padre y Madre, por ser ellos forjadores del amor y la unión en nuestra familia.

A mi esposa y mis hijas, por su constante apoyo y estímulo en mi labor profesional.

A todas aquellas personas que han confiado en mí, que me han ayudado a superar las dificultades y ahora comparten mi alegría por haber alcanzado la meta propuesta.

Agradecimiento

Al Dr. Lorenzo E. Matos Deza, por su asesoramiento y apoyo incondicional en el desarrollo de la presente investigación.

RESUMEN

La presente investigación aplicada de tipo cuasi-experimental, de grupos no equivalentes, tuvo como propósito mostrar la eficacia, en términos de rendimiento académico en matemática, del método heurístico, un método dinámico en el que el profesor a través del diálogo y mediante interrogaciones motiva, guía al alumno a comprender, a encontrar razones y justificaciones, de su aprendizaje antes de fijar conocimientos en forma mecánica.

Se aplicó a una muestra, de 59 alumnos, en dos secciones; una conformada por 29 alumnos de I.E. “José Sabogal Diéguez” y la otra conformada por 30 alumnos de la I.E. “José Gálvez Egúsquiza, del Distrito de Cajabamba.

Los resultados confirmaron la hipótesis de investigación que la aplicación del método heurístico incrementa significativamente el rendimiento académico en el área de matemática, por las pruebas estadísticas se observó que el promedio del postest del grupo experimental superó en forma significativa al del postest del grupo de control, obteniendo un $T_c = 13,1$ a la derecha que $T_{tabular} = 2$, siendo $\alpha = 0.05$.

Estos resultados nos permiten concluir que la influencia del Método Heurístico incrementa significativamente el rendimiento académico en el área de matemática, en los alumnos de tercer grado de educación secundaria.

ABSTRACT

This research applied quasi-experimental, non-equivalent groups, was aimed to show the effectiveness in terms of academic performance in mathematics, the heuristic method, a dynamic method in which the teacher through dialogue and through interrogations motivates guide students to understand, to find reasons and justifications for their learning skills before setting mechanically.

It was applied to a sample of 59 students into two sections; one consisting of 29 students I.E "José Sabogal Dieguez" and the other made up of 30 students of the S.I. "Jose Galvez Egusquiza, the cajabamba district.

The results confirmed the research hypothesis that the application of the heuristic method significantly increases academic performance in the area of mathematics, for statistical tests was observed that the average posttest experimental group significantly outperformed the posttest control group, $T_c = 13.1$ obtaining a right to $T_{tabular} = 2$, where $\alpha = 0.05$.

These results demonstrate that the influence of the heuristic method significantly increases academic performance in the area of mathematics, students in the third grade of secondary education.

ÍNDICE

	Pág.
Dedicatoria	iii
Agradecimiento	iv
Resumen	v
Abstract	vi
Índice	vii
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1 Delimitación del problema	3
1.2 Formulación del problema	7
1.3 Objetivos y naturaleza del estudio	7
a) General	7
b) Específicos	8
1.4 Formulación de hipótesis	8
1.5 Justificación del trabajo	8
1.6 Limitaciones del trabajo	10
2. MARCO TEÓRICO	11
2.1 Antecedentes del estudio	11
2.2 Corriente psicopedagógica relacionada con el trabajo	13
- Teoría de asimilación cognoscitiva	13
David Ausubel	13
2.3 Antecedentes históricos del método heurístico	16
2.4 El método heurístico como mediador del aprendizaje	19
2.5 Características del método heurístico	20
2.6 Términos básicos	22
A. Enunciados	22
B. Enunciado abierto y enunciado cerrado	23
C. Concepto de ecuación	24
D. Planteamiento y resolución de ecuaciones y sus aplicaciones	24
E. ¿Cómo podemos comenzar a aprender a resolver ecuaciones?	27
F. Sistema de ecuaciones con variables de primer grado	30
2.7 Un ejemplo de sesión de clase con la aplicación del método heurístico	31

2.8	Rendimiento escolar	36
3.	MATERIAL Y MÉTODOS	38
3.1	Material	38
3.1.1	Población	38
3.1.2	Muestra	38
3.1.3	Unidad de análisis	38
3.2	Métodos	38
3.2.1	Tipo de estudio	38
3.2.2	Diseño de investigación	38
3.2.3	Variables y operativización de variables	39
3.2.4	Instrumentos de recolección de datos	41
3.2.5	Procedimientos y análisis estadísticos de datos	42
4.	RESULTADOS	43
4.1	Procedimiento	43
4.2	Instrumento de colecta de datos	45
4.3	Resultados de la prueba de pre-test grupo experimental	46
4.4	Resultados de la prueba de pos-test grupo experimental	48
4.5	Resultados de la prueba de pre-test grupo control	50
4.6	Resultados de la prueba de pos-test grupo control	52
4.7	Comparación del nivel de enseñanza-aprendizaje planteamiento y resolución de problema	54
4.8	Análisis de significancia de la “T” de Student de la enseñanza- aprendizaje de planteamiento y resolución de problemas	55
4.9	De la encuesta sobre el método heurístico.	64
4.9.1	Resultados y análisis de los datos de la encuesta sobre características del método heurístico.	64
5.	DISCUSIÓN DE RESULTADOS	79
6.	CONCLUSIONES	83
7.	RECOMENDACIONES	85
8.	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	86
	ANEXOS	90
ANEXO A:	PRETEST DE TRABAJO DE INVESTIGACIÓN	91
ANEXO B:	POSTEST DE TRABAJO DE INVESTIGACIÓN	96
ANEXO C:	ENCUESTA PARA ESTUDIANTES DEL 3º GRADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA DE LA INSTITUCIÓN	

EDUCATIVA “JOSÉ SABOGAL DIÉGUEZ” DEL CASERÍO
DE PARUBAMBA. 100

ANEXO D: PROGRAMA DE APLICACIÓN DE LA “INFLUENCIA DEL
MÉTODO HEURÍSTICO PARA LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE
DE LA MATEMÁTICA EN ALUMNOS DEL TERCER
GRADO DE SECUNDARIA DEL DISTRITO DE CAJABAMBA 105

1. INTRODUCCIÓN

El presente informe de investigación titulado “Influencia del método heurístico para la enseñanza-aprendizaje de la matemática en alumnos del tercer grado de secundaria del distrito de Cajabamba”, es el resultado de la necesidad de conocer el uso eficaz y las ventajas que se pueden obtener en el proceso de aplicación del método heurístico, en el mejoramiento del rendimiento académico del área de matemática.

Entendemos que. La matemática ha llegado a ocupar un lugar central en la civilización actual porque es una ciencia capaz de ayudarnos en el desarrollo de nuestras capacidades matemáticas y fundamentales; como afirma Miguel de Guzmán (1993), la mayor parte de los logros de nuestra tecnología no son sino matemática encarnada con la colaboración de otras ciencias.

Una de las tendencias generales más difundidas hoy consiste en el hincapié en la transmisión de los procesos de pensamiento propios de la matemática más que en la mera transferencia de contenidos. Whitehead llamó “Ideas inertes”.

En el capítulo 1, se trata la problemática de la enseñanza-aprendizaje del área de matemática, afectada primero por la falla del sistema educativo nacional en lo coyuntural y estructural y segundo a situaciones académicas y formativas.

En el capítulo 2, se desarrolla todo lo concerniente al marco teórico, a partir de los antecedentes del estudio, bases teóricas científicas, psicopedagógicas, el método heurístico, y definiciones matemáticas.

En el capítulo 3, se establece el tipo de investigación, se fija la población y la muestra de estudio, diseño de investigación, técnicas e instrumentos de recolección de datos, análisis estadístico y la operacionalización de las variables.

En el capítulo 4, se lleva a cabo los resultados, el proceso de contraste de hipótesis.

En el capítulo 5, se presentan la discusión de los resultados.

En el capítulo 6, las conclusiones.

En el capítulo 7, las recomendaciones.

En el capítulo 8, las referencias bibliográficas.

1.1 DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA.

En el sistema educativo peruano, una de las asignaturas que ha causado y causa mayor preocupación a los alumnos, profesores, padres de familia y autoridades educativas es, sin duda alguna, la matemática. Todos son conscientes que esta materia se torna compleja y difícil de aprender y aprobar desde el primer nivel educativo hasta la educación superior (universidad) y encierra todo un mito, miedo y rechazo por parte de algunos estudiantes.

Es notorio observar que en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática en nuestro sistema educativo actual, desde la educación inicial, primaria, secundaria y superior incluso, se observa diferentes situaciones problemáticas que van desde los alumnos, profesores y padres de familia; en los alumnos se observa la dificultad por captar los contenidos, objetivos y/o capacidades de dicha ciencia formal, los cuales pueden deberse a múltiples situaciones, como la falta de comunicación entre el que enseña y el que aprende, debido quizás a que el profesor no tiene una formación matemática sólida y formación pedagógica.

Las matemáticas para mejorar el rendimiento académico, durante el procesos enseñanza-aprendizaje, emplea varios métodos. Uno de ellos es el método heurístico. Consiste en ayudar a los estudiantes a comprender la estructura del conocimiento y las formas que tienen los seres humanos en producir conocimiento (Novak y Gowin, citado por Gálvez Vásquez, 2003), agregan citando a Gallego Badillo; es una herramienta que se utiliza para, resolver un problema o para comprender un proceso.

En nuestro medio y en el Perú se continúa conduciendo el método expositivo en el aprendizaje de la matemática, que es tradicional, incluso ajeno a la escuela activa donde el alumno se convierte en actor de su propio aprendizaje.

El profesor de matemática sigue con formas tradicionales de enseñanza-aprendizaje como las siguientes:

- ✓ Método expositivo, centrado en los conocimientos.
- ✓ No se propicia el intercambio de los aprendizajes.
- ✓ Docente actor principal.
- ✓ Alumno receptor pasivo.
- ✓ Se evalúa al alumno, priorizando los contenidos memorizados.
- ✓ Se induce al alumno a memorizar y aprender mecánicamente la matemática como “recetas”, sin entender para qué ni por qué.

No hay lugar para el razonamiento, la producción del conocimiento y la elaboración de su aprendizaje.

El problema no es exclusividad de las matemáticas, sino de la forma de enseñar las asignaturas. (Capella, 1996: 22) recoge un argumento reconocido por muchos autores y expresa: “La enseñanza-aprendizaje en nuestro colegios muestra otra cara, se los hace con hábitos autoritarios, dogmáticos, rutinarios y memorísticos” y agrega (Calero Pérez, 1997:20) en nuestra escuela se genera inercia, conformismo, imitación, mecanismo-acriticidad. Al parecer la causa principal está relacionada en la enseñanza de la asignatura. (Núñez,1995: 295) ratifica este hecho cuando dice “En la actualidad la enseñanza de los contenidos matemáticos sigue constituyendo un problema por la forma de presentación de la materia en el aula”.

Hacer matemática es resolver problemas utilizando el razonamiento-matemático (Callejo, 1994: 15), Además como señala (Miguel de Guzmán, 1992:17). La enseñanza a través de la resolución de problemas es el método más indicado para poner en práctica el principio general del aprendizaje activo.

Si nos acercamos mucho más esta realidad problemática, que se vive en nuestra realidad educativa se puede observar: Que los profesores no tienen entusiasmo ni cariño por lo que enseñan, improvisación, falta de diálogo del docente con el alumno y padre de familia en forma recíproca, tampoco se induce a que el alumno descubra y desarrolle por sí mismo su capacidad matemática, el alumno no sabe resolver problemas matemáticos porque; el profesor no brinda adecuadamente los recursos académicos y metodológicos y como consecuencia el alumno tarde que temprano desmaya y fracasa.

En nuestra realidad cajabambina se puede observar en las diferentes instituciones educativas que en la asignatura de matemáticas la gran mayoría de alumnos sale desaprobado y los padres de familia se preocupan por esta situación académica de sus hijos, sin que las autoridades educativas tomen cartas en tal problemática, que a la larga ocasiona problemas para postular a una Institución de Educación Superior.

Se ha podido constatar también que los docentes del área de matemáticas de las diversas instituciones educativas de Cajabamba le dan más importancia al dominio operativo de los algoritmos que a la comprensión del significado de las operaciones. Por lo que con frecuencia alumnos y profesores caen en la memorización.

Se ha constatado que en nuestra realidad educativa local, que los alumnos del nivel secundario de nuestro distrito muestran bajo rendimiento en la asignatura de matemática, según se pudo constatar en los documentos de fin de año (actas de evaluación) de la UGEL, en los que en cada año entre un 40% y 50% salen desaprobados, según se pudo constatar en el año 2012. Su promedio de rendimiento está en el rango de 11, 12 lo que evidencia en estos alumnos escaso desarrollo de las capacidades matemáticas como es la resolución de

problemas; comunicación matemática y razonamiento y demostración, todo es debido a que los docentes siguen trabajando con métodos tradicionales, que lo único que logran es una trasmisión y aprendizajes de contenidos, con métodos memorísticos, carentes de significado y contexto, sin utilidad para la vida.

Por otro lado se ha podido constatar que la gran mayoría de los colegas de matemáticas de Cajabamba, la enseñanza de sus sesiones de aprendizaje lo hacen sumamente frías, desmotivadas y monótonas, originando en los alumnos falta de actitud, amor, seriedad y originalidad en éstos, así mismo la demostración matemática está lejana en nuestro contexto educativo, el alumno no sabe probar las cosas, lo esencial de las relaciones matemáticas no se enseña (análisis, síntesis, abstracción y generalización), lo cual origina que el alumno aprenda los conceptos matemáticos de una manera memorística, tampoco se brinda oportunidad para que los alumnos piensen, opinen y debatan sobre lo tratado, se sigue con el viejo enfoque de educar, donde el maestro es la autoridad y el alumno un ente pasivo de tal proceso. Por lo que indudablemente se requiere de un método más funcional y racional, como podría ser el método heurístico.

El MINEDU propone que para aprender matemática se debe utilizar una variedad de estrategias y recursos que permitan generar aprendizajes significativos en los estudiantes y que éste se aprende mejor cuando se desarrolla en situaciones de la vida real. Nuestros estudiantes desarrollan aprendizajes significativos cuando vinculan sus experiencias y saberes con la realidad que lo circunda, el profesor es considerado un agente mediador y provocador de formas de pensar y reflexionar durante las actividades matemáticas. Se debe adoptar un enfoque centrado en la resolución de problemas desde el cual, a partir de una situación problemática se desarrolla capacidades matemáticas.

“La resolución de problemas, como enfoque que orienta y da sentido a la educación matemática, con el propósito que se persigue de desarrollar ciudadanos que actúen y piensen matemáticamente, al resolver problemas en diversos contextos, asimismo, orienta la metodología en el proceso de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática” (Rutas de Aprendizaje, 2013:p.9).

Esta investigación se propone determinar la eficacia del Método Heurístico donde una de sus características esenciales es la interrogación para la enseñanza-aprendizaje de la matemática, específicamente en los alumnos del tercer año de educación secundaria del distrito de Cajabamba; de tal manera que con su aplicación se pueda mostrar el efecto positivo en el rendimiento académico y como consecuencia de esto, la satisfacción de los estudiantes en el aprendizaje del área en mención y del mismo modo la reducción porcentual de estudiantes con calificaciones desaprobatorias.

Frente a esta situación problemática expuesta, se propone como alternativa el método heurístico para el mejoramiento del aprendizaje de la matemática.

1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA.

¿Cuál es la eficacia del método heurístico en la enseñanza - aprendizaje del área de matemática en los alumnos del tercer grado de secundaria, del distrito de Cajabamba?

1.3. OBJETIVOS Y NATURALEZA DEL ESTUDIO.

Los objetivos que se establecen para el desarrollo del siguiente trabajo de investigación son los siguientes:

- a) GENERAL:** Determinar la eficacia del método heurístico en la enseñanza-aprendizaje del área de matemática (ecuaciones) en los alumnos del tercer grado de secundaria del distrito de Cajabamba.

b) ESPECÍFICOS:

- ❖ Determinar comparativamente en términos de rendimiento académico, el grado de eficacia del método heurístico y el del método tradicional expositivo; en la enseñanza aprendizaje del área de matemática.

- ❖ Demostrar comparativamente, que con la aplicación del método heurístico, se reduce significativamente, el porcentaje de estudiantes desaprobados en el área de matemática.

- ❖ Identificar las características del método heurístico.

1.4. FORMULACIÓN DE HIPÓTESIS.

La aplicación del método heurístico, incrementará significativamente el rendimiento académico en el área de matemática (ecuaciones) en los alumnos del tercer grado de secundaria del distrito de Cajabamba.

1.5. JUSTIFICACIÓN DEL TRABAJO

La investigación es de trascendental importancia por qué la matemática en los alumnos tiende a conseguir una sólida estructuración mental del educando, induciéndolo a descubrir nociones matemáticas graduadas y estrechamente ligadas al desarrollo de habilidades de carácter operativo y de técnicas para la operación de problemas en todos los campos y niveles del conocimiento.

En estas perspectivas la adquisición de las nociones no puede llevarse a cabo con una enseñanza memorística. Uno de los errores del sistema tradicional fue el de presentar conceptos ya elaborados, sin que éstos hubieran sido abstraídos de la experiencia personal del

educando. Este procedimiento impedía la realización fluida del pensar lógico y creativo.

La matemática como ciencia exige que su construcción se haga en forma coherente, en base a ciertas proposiciones que pueden ser nociones intuitivas, no necesariamente “verdades evidentes”, sino puntos de partida para el razonamiento.

Es así que el nuevo enfoque de la matemática pretende que el proceso de aprendizaje se dé a través de actividades sensorio-motrices, perceptivas, lógicas, numéricas y espaciales, que permitan al educando interiorizar y coordinar sus ideas lógico-matemáticas y al mismo tiempo desarrollar sus estructuras mentales. (Guía para el Desarrollo del Pensamiento a Través de la Matemática, 2006: 31).

Por eso la necesidad del método heurístico.

Mediante la aplicación del método heurístico en la matemática, el alumno trabajará activamente y llegará por sí mismo a conclusiones lógicas, adquiriendo actitudes y habilidades que le permitan llegar gradualmente a la abstracción, así como realizar estudios más avanzados en el campo matemático. El alumno se enfrentará constantemente a situaciones nuevas que favorezcan su capacidad de razonamiento, su creatividad y le darán la oportunidad de aplicar sus conocimientos a problemas inspirados en la realidad.

La investigación servirá para que los alumnos dispongan de los instrumentos operativos básicos que favorezcan su capacitación laboral y le permitan resolver las situaciones problemáticas que la vida diaria plantea.

Así mismo a tener un espíritu investigador y creativo que lo induzcan a una permanente auto-educación, así como a estimular su actitud de cooperación social, elevar los niveles científicos-tecnológicos que contribuyan a acelerar el desarrollo integral del país.

1.6. LIMITACIONES DEL TRABAJO.

Las limitaciones encontradas en la presente investigación han sido las siguientes:

- ✓ La falta de antecedentes en relación a la investigación realizada.
- ✓ La falta de apoyo económico e incentivos para la investigación.
- ✓ Desconfianza o poca confianza para permitir la aplicación de la encuesta.
- ✓ Desconfianza e inseguridad a la hora de responder la encuesta.

2. MARCO TEÓRICO

2.1 . ANTECEDENTES DEL ESTUDIO

Revisando la literatura existente, hemos encontrado los siguientes antecedentes que de alguna manera tienen relación con el siguiente trabajo de investigación.

ROJAS MONTOYA, A.M (2002) “Influencia del programa “El razonamiento matemático abstracto” en el aprendizaje de la matemática en el primer año de educación secundaria”. Cuyas principales conclusiones son las siguientes:

- ✓ Los alumnos del primer año de educación secundaria tienen un bajo rendimiento académico en el área de matemática, porque tienen dificultades de razonamiento abstracto en la solución de diferentes problemas que se les presenta en el estudio de la matemática. Pero gracias a la aplicación del Programa “El razonamiento matemático abstracto” elevan su rendimiento académico.
- ✓ Los alumnos del primer año de educación secundaria, donde se aplicó el programa “El razonamiento matemático abstracto”, mejoraron su rendimiento académico en el área de matemática.

RAMIREZ AMAYA, J. (2000) “Programa de ejercitación de habilidades lógico matemática y su influencia en el rendimiento escolar en la asignatura de matemática en alumnos del primer grado de educación secundaria del C.E.81001 República de Panamá. Cuyas principales conclusiones son las siguientes:

- ✓ El nivel de desarrollo de las habilidades lógica matemática después de la aplicación del programa fue mayor que al inicio del programa.

- ✓ El rendimiento escolar después de la aplicación del programa se incrementó a un nivel significativo.
- ✓ Los módulos de seriación, clasificación e inclusión fortalecieron a las habilidades lógicas matemáticas e influenciaron significativamente el rendimiento escolar en el grupo experimental.

RUIZ GONZÁLES, C.F (2002) “Programa de Razonamiento Matemático para mejorar el Rendimiento Escolar en el Área Lógica Matemática en alumnos de Segundo Grado de educación Primaria”, para optar el grado académico de maestro en educación, mención psicología educativa de la Universidad Nacional de Trujillo, Escuela de Post-grado, sección de Post-grado en Educación. Trabajo cuyo tipo de investigación es aplicada y cuasi experimental, con pre-test y post-test, realizada en centro educativo N° 821287-provincia de Cascas-Trujillo, en el año 2002, considerando como población de estudio la sección del segundo grado de educación primaria, donde puso en práctica-la aplicación de un programa de razonamiento matemático, para mejorar el rendimiento académico de matemática. Cuyas conclusiones más importantes son:

- ✓ El programa de razonamiento matemático aplicado mejoró significativamente el rendimiento escolar en el área lógicamente en los alumnos de 2º de educación primaria. Así lo confirma la prueba estadística que arroja un $t \leq p 0,05$.
- ✓ Las habilidades lógicas matemáticas más favorecidas con la aplicación del programa de razonamiento matemático fueron seriación, clasificación y los menos favorecidos fueron espacio-tiempo, combinatoria y resolución de problemas.

2.2 CORRIENTE PSICOPEDAGÓGICA RELACIONADA CON EL TRABAJO.

Teoría de asimilación Cognoscitiva

David Ausubel

Ausubel comenzó con la suposición de que el conocimiento está organizado en estructuras jerárquicas en las que conceptos subordinados son incluidos bajo conceptos superordinados de nivel superior. Aún si se olvidan detalles de manera gradual, se tiende a recordar ideas claves asociadas con una estructura cognoscitiva particular y a retener la estructura cognoscitiva particular y retener la estructura misma. La estructura proporciona un andamiaje que apoya la retención de la información como un cuerpo de conocimiento organizado. También funciona como marco dentro del cual se interpreta el conocimiento nuevo relacionado o se reaprende de manera eficiente el conocimiento olvidado.

Ausubel (1983) propone una clasificación del aprendizaje en una tabla de doble entrada: en la primera está la polaridad: aprendizaje receptivo-descubrimiento; en la segunda la polaridad: aprendizaje significativo-repetitivo.

El aprendizaje puede ser repetitivo o significativo según lo aprendido se relacione arbitraria o sustancialmente con la estructura cognoscitiva. Se hablara así de un aprendizaje significativo. Cuando los nuevos conocimientos se vinculen de manera clara y estable con los conocimientos previos de los cuales disponía el individuo. En cambio el aprendizaje repetitivo sería aquel en el cual no se logra establecer esta relación con los conceptos previos o sí se hace, es de forma mecánica, y por lo tanto, poco duradera.

Desde el punto de vista del método, existen también dos grandes posibilidades. La una consiste en presentar de manera totalmente acabada el contenido final que va a ser aprendido; en este caso

hablaremos de un aprendizaje receptivo. La segunda posibilidad se presenta cuando no se le entrega al alumno, no el contenido en su versión final, sino que éste tiene que ser descubierto e integrado antes de ser asimilado, caso en el cual estaremos ante un aprendizaje por descubrimiento.

La combinación de estos dos tipos de aprendizaje y dos métodos de enseñanza da lugar a cuatro tipos de aprendizaje.

Aprendizaje por recepción significativa.

En este caso, el material nuevo y lógicamente organizado aparece en su forma definitiva y se relaciona con los conocimientos preexistentes.

Aprendizaje receptivo por fijación o memorización.

Aparece aquí un material de cualquier clase en forma definitiva y se memoriza dicho material.

Aprendizaje por descubrimiento significativo.

El alumno llega a la solución de un problema o a otros resultados por sí solo y relaciona esta solución con sus conocimientos previos

Aprendizaje por descubrimiento memorizado.

Aquí se llega a la solución independiente pero dicha solución se memoriza de manera mecánica.

La preocupación principal de la escuela, debe estar centrada en garantizar que los aprendizajes sean significativos para sus estudiantes, de decir, que se vinculen de manera sustancial con sus estructuras cognitivas.

Aprendizaje significativo.

(Ozejo Valencia, 2000: 32) sostiene que el aprendizaje significativo es un concepto clave que usualmente se asocia a David Ausubel, aunque no es el único que desarrolla una propuesta teórica que lo involucra.

Destaca también Carl Rogers que desde una concepción humanista del aprendizaje, ubica el desarrollo personal del alumno en el centro del proceso educativo, sostiene que los elementos que intervienen en el aprendizaje significativo o vivencial son:

Poseer una cualidad de compromiso personal, que involucra a la persona tanto cognitiva como efectivamente.

Es autoiniciado, pues aunque el estímulo provenga del exterior, el significativo del descubrimiento, de logro, de captación y de comprensión se origina en su interior.

Es penetrante, diferente de la conducta, las actitudes y quizá también de la personalidad del que aprende.

El mismo alumno lo evalúa, sabe si responde a su necesidad, si lo conduce a lo que quiere saber o si explica algún punto oscuro de su vivencia.

Su esencia es el significado, que se construye dentro de la experiencia global del alumno. Por su parte, Ausubel sostiene que el aprendizaje significativo comprende la adquisición de nuevos significados y, a la inversa, que éstos son productos del aprendizaje significativo.

La esencia de este proceso consiste “en que ideas expresadas simbólicamente son relacionadas de modo no arbitrario y sustancial (no al pie de la letra) con lo que el alumno ya sabe. Por relación sustancial y no arbitrario queremos decir que las ideas se relacionan con algún aspecto existente específicamente relevante de la estructura cognoscitiva del alumno, como una imagen, un símbolo ya significativo, un concepto o una proposición. (Ausubel ,1983: 48).

Reiteradamente nuestros docentes se encuentran con un cuadro desalentador cuando van a presentar un nuevo conocimiento, para el cual se requiere por parte de los estudiantes de ciertos prerrequisitos:

conceptos y procesos matemáticos previos. Sin embargo estos prerrequisitos sólo los poseen unos cuantos.

Esto sucede porque el aprendizaje anterior no fue significativo, es decir el estudiante no le dio la importancia necesaria para incorporarlo a su estructura cognitiva, no era de su interés, sólo lo aprendió para el momento, para no desaprobar. Sin embargo, los docentes siempre identificaran algunas nociones que los estudiantes poseen relacionadas con el nuevo contenido, se necesita ser creativos.,

Queda claro que para Ausubel el factor principal del aprendizaje es la estructura cognitiva que posee el sujeto. Postula cuatro tipos de aprendizaje: por recepción significativa, por recepción memorística, por descubrimiento memorístico y por descubrimiento significativo. El aprendizaje por descubrimiento significativo se lleva a cabo cuando el estudiante llega a la solución de un problema u otros resultados por sí solo y relaciona esta solución con sus conocimientos previos.

2.3 ANTECEDENTES HISTÓRICOS DEL MÉTODO HEURÍSTICO.

El maestro Florencio de Jaime a inicios del siglo XIX, al tratar sobre la corriente filosófica educacional en la que estaba encuadrada el método heurístico dice: “el empleo de este método en las clases alemanas se remonta al movimiento de opinión creado mediante la publicación de la obra el “Emilio” de Rousseau. La influencia de Rousseau y del nuevo ideal que él propuso para la educación, el desarrollo de las actitudes naturales del educando, fue inmensa en Alemania, más profunda que en la misma Francia, dice al respecto M. Paulsen: “Kant fue impresionado poderosamente por la lectura del Emilio y fue uno de los primeros que hizo conocer las ideas de Rousseau en Alemania, Pestalozzi las aplicó con una devoción admirable en la enseñanza primaria. Enseguida penetraron en la educación secundaria”. (Malaspina, 1998: 20).

Los hombres que se preocuparon de restaurar el estado prusiano sintieron la necesidad de restaurarlas sobre principios nuevos, porque en el viejo estado había reinado el absolutismo, el cual favorecía el espíritu de inercia, egoísmo y el pacífico, en cambio el nuevo método de enseñanza, no podía desarrollarse sin considerar la actitud espontánea libre de todos sus miembros: era indispensable darles a estos últimos una educación nueva la cual les permita actuar por sí mismos, de esta manera Pestalozzi fue tomado como guía en el dominio de la enseñanza popular y quería que la educación tuviera tendencia hacia la actividad espontánea, sin embargo, sus métodos de enseñanza penetraron lentamente en las escuelas secundarias.

A principios del siglo XIX en Alemania e Inglaterra empezó a manifestarse la inquietud pedagógica de Pestalozzi, porque en ese entonces ya se criticaba a los métodos tradicionales de la enseñanza de la matemática que fundamentalmente se les atribuía a los malos pedagogos de ese entonces en esta materia. La enseñanza de las matemáticas que tenía como finalidad la adquisición de destrezas de cálculos necesarios para la vida ordinaria, se fue agravando cuando se obligaba a los niños el aprendizaje de la lógica y los razonamientos euclídeos sin tener en cuenta que los alumnos de Euclides no fueron niños y se tuvo como resultado de esta aversión la inadaptación del niño por la matemática y se llegó incluso a creer que para su aprendizaje era necesario tener cualidades especiales, de allí que la enseñanza debía tener en cuenta la naturaleza variable e intereses del niño y el método que más se adapta a estas consideraciones es el heurístico, en el cual el profesor sirve de guía para que el alumno vaya descubriendo por sí mismo las verdades o los conocimientos; es decir el acto de aprender debe predominar sobre el acto de enseñar, contrariamente a lo que establece la enseñanza clásica en donde el maestro transmite de la mejor manera posible los conocimientos y se creía que quien era enseñado de esa manera aprendía mejor porque el aprender era el pasivo mientras que el activo era el enseñar, como

observa agudamente Rey Pastor, cuando dice: “No es la posición de los bienes, en este caso cultural, si no en adquisición, lo que depara al hombre las mayores satisfacciones” (Malaspina, 1998: 22).

El método heurístico tiende a relacionar el proceso de génesis de los conocimientos y el proceso de transmisión de los mismos, sin considerar las limitaciones del alumno en la comprensión permanente de las relaciones lógicas, formales o abstractas que se presentan en matemática; es el método, el que mejor responde a la biogenética del estudiante, considerando que “el desarrollo del individuo reproduce en pequeño el desarrollo de la especie, porque hace pasar al alumno por un proceso de formación de conceptos análogos al experimentado por la humanidad” (Malaspina, 1998: 23).

En la aplicación y desarrollo del método heurístico a través de la historia se pueden mencionar a los siguientes matemáticos:

PAPPUS.-celebre matemático griego, vivió posiblemente hacia el año 300 a.c., en su libro “tesoros de análisis” o “arte de resolver problemas” o “heurística” dice lo siguiente: “la heurística para llamarla por su nombre es un resumen, una doctrina especial, para el uso de aquellos que tras haber estudiado los elementos ordinarios, desean dedicarse a la solución de problemas matemáticos: no es utilizable para otros casos. En la obra de tres hombres Euclides, autor de los elementos; apollonius de perga y aristasus los que mejor enseñan los métodos de análisis i síntesis” (Polya, 1990:133).

RENE DESCARTES (1596 -1650) filósofo y gran matemático se propone encontrar un método universal para la solución de problemas pero dejo inconclusas sus “reglas para la dirección de la mente”.

Los manuscritos dejados por él y que fueron editados después de su muerte contienen fragmentos de cómo resolver problemas.(Polya, 1990:73)

WILHELM GOTTFRIED LEIBNIZ (1646 – 1716) fue celebre filósofo y matemático planeo escribir una obra que tendrá como título “arte de la

invención”, pero nunca lo llevo a cabo, en cambio escribí “no hay nada más importante que el considerar las fuentes de la invención que son a mi criterio más interesantes que las invenciones” (Polya, 1990:120)

BERNARDO BOLZANO WEIRTRAS. (1781-1848) fue legista y matemático en su obra lógica “*wissensehaftslebre*”, dedicó gran parte de ella a la heurística y respecto a esto escribe “No pretendo en lo absoluto aquí ningún procedimiento de investigación que no sea conocido desde hace tiempo de los hombres de talento, no creo que encuentre aquí nada completamente nuevo en la materia, pero voy a esmerarme en asentar en términos claros, las reglas y los caminos de la investigación seguido sin tener plena conciencia de ellos. Si bien ignoro si he tenido o no éxito en la empresa, guardo al menos la ilusión que mi modesta contribución sea del gusto de alguien y tenga aplicaciones más tarde”. (Polya, 1990:143).

2.4 EL MÉTODO HEURÍSTICO COMO MEDIADOR DEL APRENDIZAJE.

EL MÉTODO HEURÍSTICO: ETIMOLOGÍA Y DEFINICIÓN.

ETIMOLOGÍA.- La palabra o término heurístico proviene del griego “*επισχω*” o “Euricio” que quiere decir “Yo encuentro”, que sirve al descubrimiento. En pedagogía-método que hace que el propio alumno descubra las verdades que le quieren enseñar. (Salazar Bondy, 1967: 46).

Etimológicamente al método heurístico se le conoció como la heurística que quiere decir “conocimiento seguro”, era el nombre que se le daba a una ciencia mal definida que se relaciona con la lógica, la filosofía y la sociología; cuyo objetivo principal fue el de estudiar las leyes y los métodos de la invención y del descubrimiento.

DEFINICIÓN.- “Es un método de enseñanza activo, en el cual el docente a través del diálogo y mediante interrogaciones motiva, incita, guía al estudiante a comprender, a encontrar razones antes de fijar los conocimientos. El estudiante debe tener oportunidad de descubrir justificaciones o fundamentos y debe investigar para ello, ejercitando de esta forma sus facultades mentales, alimentando sus iniciativas personales y desarrollando su espíritu de investigación”. (Valiente Varderas Santiago, 2000: 74).

Para Néreci Imideo(1969,p.249) el método heurístico, consiste en que el profesor incite al alumno a comprender antes que fijar, implicando justificaciones o fundamentaciones lógicas y teóricas que puedan ser presentadas por el profesor e investigadas por el alumno, a quien se le da el derecho a discordar o de exigir los fundamentos indispensables para que el asunto sea aceptado como verdadero. Es decir se debe comprender antes que aprender por “memorización”, todo debe adquirir una forma de descubrimiento.

2.5 CARACTERÍSTICAS DEL MÉTODO HEURÍSTICO.

Las principales características que presenta el método heurístico son:

- a) **ES UNA CONVERSACIÓN INSTRUCTIVA.**- Bien se sabe que la instrucción es la que alimenta y nutre a la educación para que de este modo pueda crecer y progresar o desarrollarse. El método heurístico es un instrumento de que el profesor se vale, para poder realizar dicha educación, puesto que sostiene como ninguno la atención al discípulo y educa su voluntad, obtiene de sus facultades cognitivas el mayor rendimiento posible, le proporciona el placer inefable de que él descubra la verdad, le infunde curiosidad del saber y confianza en su capacidad y le convence de que es posible instruirse así mismo.
- b) **SE BASA EN UN DIÁLOGO.**- En el método heurístico, el diálogo es utilizado a gran escala, pues se toma en consideración que

dicho diálogo no es más que una participación del diálogo universal, que une a los seres entre sí, y que hace que toda palabra del hombre dicha a sí misma es también comunicativa.

El diálogo por consiguiente como conector universal del ser está en la forma de interrogar y en la forma de responder. La lección dialogada es siempre fructífera de alguna manera y por eso en el método heurístico se exige más repetición de donde se resalta que es más corto porque su eficacia compensa la duración del ejercicio.

- c) SU ESENCIA ES LA INTERROGACIÓN.- En el método heurístico todo conocimiento que se desea que los alumnos descubran tiene que dividirse en una serie de interrogantes, las cuales generalmente son expuestas por el profesor.

Esta interrogación por parte del maestro debe empezar por llamar la atención de los alumnos sobre el asunto de la lección y fundándose en los conocimientos que aquellos tienen, les expone un conjunto de situaciones hábilmente combinadas, intentando con ella, hacerles descubrir o encontrar por sí mismo la verdad o el conocimiento deseado.

El profesor para cumplir a cabalidad con esta característica tiene que considerar que:

- Las preguntas estén al alcance de los alumnos y que sean variadas.
- La claridad de la interrogación y que cada pregunta considere la corrección la sencillez y la brevedad.
- Las interrogantes deben expresarse metódicamente, obedeciendo a un plan y dentro de la graduación, en lo posible se debe considerar que las más fáciles preceden a las difíciles y que a su vez preparen la solución del tema en estudio.

- El número de interrogantes debe estar en concordancia con el tema y los objetivos del aprendizaje del tema de estudio.
- d) **ES UN MÉTODO ACTIVO.**- En este método se descarta las lecciones dogmáticas o expositivas, pues se exige que el estudiante haga un esfuerzo personal, haciéndole encontrar por sí mismo lo que se le quiere enseñar. Desde este punto de vista, concebir al método heurístico como activo, no es errar sino acertar, pues la participación del alumno en la elaboración del conocimiento es siempre requerida y sin actividad no se puede avanzar, sin aun comenzar en la aplicación heurística.
- e) En resumen es un método activo que requiere obligatoriamente la participación conjunta del profesor y del alumno y en el cual el segundo aprende contribuyendo el mismo en las respuestas, descubriendo por su propio parecer los conocimientos. Pero no solo la actividad en mención la realiza el alumno, sino que a su vez el maestro se ve en la obligación y necesidad de interesarse más aun en su curso o materia que tiene a su cargo.

2.6 TÉRMINOS BÁSICOS.

A. ENUNCIADOS

Las expresiones tales como: 2 es número par, $5+3 = 8$, $8-2 > 4$, $15:3 = 4$, $2x6 < 10$, $a = b-a$, etc. se denominan enunciados.

La observación de las expresiones nos permite afirmar que los enunciados pueden ser verdaderos o falsos. Así, $5+3 = 8$ y $a+b = b+a$, son enunciados verdaderos porque se cumple la relación de igualdad; pero $2x6 < 10$ y $a+b = b-a$ son enunciados falsos porque no se cumplen las relaciones de desigualdad e igualdad respectivamente.

Luego podemos decir:

Enunciados son expresiones que afirman o niegan algo.

B. ENUNCIADO ABIERTO Y ENUNCIADO CERRADO

Sea por ejemplo: $x + 2 = 5$

Esta afirmación contiene una viable y deja la posibilidad de ser verdadera o falsa según los valores que tenga "x". Así, el enunciado es verdadero solamente cuando $x = 3$; y es falso cuando $x \neq 3$.

En $x + y = 6$, hay dos variables, el enunciado es verdadero si los elementos de los pares ordenados (a,b) sumados dan 6.

Así tenemos:

X	0	1	2	3	4	5	6
Y	6	5	4	3	2	1	0

Luego el conjunto de los pares ordenados que hacen verdadero este enunciado es:

$$\{(0,6), (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1), (6,0)\}$$

Todo par ordenado diferente de los que forman este conjunto, hacen falso el enunciado.

Los enunciados $x + 2 = 5$ $x + y = 6$ que contienen variables se denominan enunciados abiertos.

Luego podemos decir:

Un enunciado que contiene una o más variables se llama enunciado abierto.

Como podemos observar los enunciados abiertos además de variables pueden tener constantes.

Los enunciados tales como: $7 + 5 = 12$, $3 \times 6 > 20$, (es falso) $10 - 7 = 3$

$18/3 < 5$, (es falso), etc. se denominan enunciados cerrados porque no contienen variables, sino solamente constante.

C. CONCEPTO DE ECUACIÓN

Un enunciado abierto que tiene el signo igual se llama ecuación. Así, por ejemplo: $x + 4 = 10$, es una ecuación de primer grado con una variable, cuyo conjunto solución es $\{6\}$ definido por $\{x / x + 4 = 10\}$ (Villanueva, 1975: 34).

$x + y = 5$, es una ecuación de primer grado con dos variables, cuyo conjunto solución está definido por $\{(x, y) / x + y = 5\}$.

Cuando se tiene dos ecuaciones de primer grado con dos variables, tales como:

$$x + y = 8$$

$$x - y = 2$$

El conjunto solución es $\{(x, y) / x + y = 8\} \cap \{(x, y) / x - y = 2\}$.

Estas ecuaciones toman el nombre de Ecuaciones de primer grado con dos variables.

D. PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE ECUACIONES Y SUS APLICACIONES

Siguiendo las recomendaciones de George Poyla, quien ha creado un plan para la enseñanza heurística, hemos creído a bien aplicarlo al planteamiento y resolución de problemas sobre ecuaciones de la siguiente manera:

- **Primero se debe entender el problema.-** En esta etapa se debe ubicar la incógnita y representarla, es fundamental leer todo el enunciado para entender el problema. La incógnita o incógnitas (que a veces coinciden con la pregunta del problema y otras no) no tienen un lugar fijo de ubicación dentro del enunciado. Puede estar al inicio en la parte intermedia o al final. Es por ello que una lectura atenta nos permitirá descubrir dónde está y cuál es la incógnita (o las incógnitas). Una vez ubicada(s) procederemos a su representación de acuerdo a lo visto en la primera parte.
- **Imagine usted un plan.-** El cual me va a permitir traducir el enunciado, en base a la(s) incógnita(s) hallada(s). Todo el trabajo presente está orientado a que usted domine este aspecto. Durante los ejemplos fíjese cómo es que hay frase es de uso muy común y que casi siempre tienen un único equivalente algebraico, por ejemplo:
 - Aumentado.
 - Su equivalente matemático es el símbolo: $+$
 - Agregado.
 - Un aspecto muy importante- durante la traducción –que Ud. Debe observar con mucha atención es el referido a los signos de puntuación en el enunciado.
 - En términos generales la coma, el punto y coma, los puntos sucesivos, sirven para separar a dos expresiones de traducción diferente entre sí, o en forma más práctica a ecuaciones diferentes también entre sí.
 - Siempre que se haya acabado con la traducción del enunciado debemos tener ya en nuestro poder la o las ecuaciones que nos permitan resolver el problema en

cuestión. Aquí acaba el proceso de planteo = traducción propiamente dicho.

- **Ejecutar el plan.**- El cual significa resolver la ecuación hallada, es decir la solución integral del problema. Se realiza atendiendo al tipo o tipos de ecuaciones que tengamos y usando el método más adecuado para ello.
- **Examinar la solución.**- Consiste en comprobar el resultado, una vez resueltas las ecuaciones que llegaron a plantearse y habiéndose obtenido el valor de las variables- por lo tanto el de las incógnitas – procederemos a comprobar su validez haciendo con ellos lo indicado en el enunciado. Su corrección residirá en que hallemos al reemplazarlas los mismos valores que el enunciado indica:
 - ✓ Para formular una ecuación es recomendable formular problemas tipo adivinanzas, inicialmente sencillas y luego ir ampliando el grado de dificultad, según el grado y nivel mental de los estudiantes. Aquí es sumamente importante la traducción de enunciados de la forma verbal a la simbólica.
 - ✓ Cuando al estudiante se le presenta adivinanzas que sabe debe resolverlas matemáticamente, se preocupa primeramente en traducir bien a la forma simbólica, es decir, formular bien la ecuación y luego resolver dicha ecuación
 - ✓ Este camino induce a querer plantear adivinanzas cada vez más difíciles y como consecuencia, resultarán ecuaciones cada vez más complicadas que el alumno tiene la necesidad de aprender a resolverlas.

- ✓ Este nuevo orden destierra el orden clásico en el que muchos hemos aprendido: Nos definan una ecuación, luego nos ejercitaban resolviendo una buena cantidad de ecuaciones sin saber por qué ni para qué nos servirán posteriormente y por último nos enseñaban a resolver problemas con ecuaciones. Esta última parte era de tanta dificultad y temida en muchos casos, que era frecuente entre los estudiantes la expresión: “para resolver problemas con ecuaciones, lo difícil es formar la ecuación. Si la ecuación está bien formada, el problema está prácticamente resuelto”. (Zevallos,1987:9)
- ✓ Los alumnos teníamos razón y la seguirán teniendo aquellos cuyos profesores siguen con ese orden clásico.
- ✓ Recordemos que la clave es que el alumno sepa traducir lo que habla o lee al idioma simbólico de la Matemática y el mismo se crea la necesidad de aprender a resolver ecuaciones.

E. ¿CÓMO PODEMOS COMENZAR A APRENDER A RESOLVER ECUACIONES?

Para iniciar en la solución de ecuaciones, sobre todo en los primeros grados, puede utilizarse una balanza de dos platillos y construida por los mismos alumnos.

Ejemplos:

1.- Para resolver la ecuación

$$x + 2 = 7$$

Podemos proceder como sigue:

Colocamos en uno de los platillos una bolsita con bolitas (canicas) de cristal y dos bolitas sueltas y en el otro platillo se colocan las bolitas necesarias para equilibrar la balanza, que en nuestro caso

serían necesarias 7, resultando la balanza equilibrada y la ecuación balanceada

Para encontrar cuántas bolitas tiene la bolsita sacamos las dos bolitas sueltas que están junto a ella y vemos que para que la balanza se mantenga en equilibrio es necesario sacar del otro platillo también dos bolitas. Esto simbólicamente se indica

$$\begin{aligned}
 x + 2 &= 7 \\
 x + 2 - 2 &= 7 - 2 \\
 x &= 5
 \end{aligned}$$

Hasta aquí tenemos la bolsita con bolitas en un platillo y 5 bolitas en el otro platillo, quedando la balanza en equilibrio. Esto significa que la bolsita también tiene 5 bolitas.

2. Si dos bolsas de harina más un paquete de 3Kg de peso pesan 13 Kg., ¿cuánto pesa cada bolsa de harina?

Solución

Peso de cada bolsa de harina	x
Peso de dos bolsas de harina	2x
Peso de las dos bolsas más el paquete	2x + 3
... pesan 13 Kg.....	2x + 3 = 13

En esta ecuación puede ser representada en la balanza en la misma forma anterior e ir representando como sigue:

$$\begin{aligned}
 2 \text{ bolsitas de bolitas} + 3 \text{ bolitas sueltas} &= 13 \text{ bolitas} \\
 2 \text{ bolsitas de bolitas} + 3 \text{ bolitas} - 3 \text{ bolitas} &= 13 \text{ bolitas} - 3 \\
 \text{bolitas} &
 \end{aligned}$$

$$2 \text{ bolsitas de bolitas} = 10 \text{ bolitas}$$

$$1 \text{ bolsita de bolitas} = 5 \text{ bolitas}$$

Esto significa que la bolsita tiene 5 bolitas o lo que estaría representado que cada bolsa de harina pesa 5Kg.

Al ir avanzando se puede ir dejando la balanza y al mismo tiempo ir complicando los problemas en forma de adivinanzas de manera que las ecuaciones sean cada vez más complicadas y se vea la necesidad de emplear las propiedades de las operaciones relacionadas con la igualdad.

3.- En una reunión de amigos se puede proponer que se es capaz de adivinar la edad a todos ellos

Si aceptan, dar las siguientes indicaciones: Multipliquen su edad por 2, sumen 4, multipliquen por 5, resten 10 y que digan el resultado. Si alguien dice que obtuvo 300 como resultado, le diremos que tiene 29 años. ¿Cómo explicamos esto?

Veamos:

Edad de cada persona	x
multipliquen por 2.....	2x
sumen 4	2x + 4
.multipliquen por 5.....	5(2x + 4)
resten 10	5(2x + 4) - 10
... al haber obtenido 300, escribimos.	5(2x + 4) - 10 = 300

Resolviendo esta ecuación:

$$5(2x + 4) - 10 = 300$$

$$10x + 20 - 10 = 300$$

$$10x + 10 = 300$$

$$10x + 10 - 10 = 300 - 10$$

$$10x = 290$$

$$x = 29$$

Se puede continuar resolviendo problemas tipo adivinanzas con respecto a edades, pesos, cantidad de dinero que tiene en el bolsillo una persona, números pensados, etc. Gutiérrez V. (2003:p.141)

F. SISTEMA DE ECUACIONES CON VARIABLES DE PRIMER GRADO.

SISTEMAS DE DOS ECUACIONES CON DOS VARIABLES DE PRIMER GRADO.

Veamos un ejemplo con el que podríamos hacer ver al estudiante la necesidad de emplear dos variables o la facilidad que ello produce:

Enrique tiene 8 animales entre gallinas y conejos. Un amigo que visito a Enrique vio estos animales y no se acuerda el número exacto de cada uno de ellos, pero se acuerda que contó 26 patas. ¿Cómo hacemos para hallar el número de gallinas y de conejos?

Solución

Número de gallinas	x
Número de conejos	y
Número de patas de gallina	2x
Número de patas de conejo	4y
Número de gallinas y conejos	$x + y = 8$
Suma total de patas	$2x + 4y = 26$

Hemos formado dos ecuaciones con dos variables de primer grado y que en conjuntos decimos que forman el **sistema de dos ecuaciones con dos variables de primer grado**, que escribimos:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + 4y = 26 \end{cases}$$

De la misma manera se puede formular problemas que nos lleven a formar sistemas de mayor número de ecuaciones con igual número de variables de primer grado. Veamos:

Un sistema de dos ecuaciones con dos variables de primer grado es de la forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Donde x, y son las variables; **a, b, c, d, e y f**, son constantes; con **a, b, d, e** no todas nulas, son los coeficientes y **c, f**, los términos independientes.

Para resolver cualquiera de los sistemas de ecuaciones antes anotados se puede emplear cualquiera de los siguientes métodos:

1. De reducción o de sumas y restas
2. De sustitución
3. De igualación
4. Gráfico
5. De Cramer o por determinantes.

2.7. UN EJEMPLO DE SESIÓN DE CLASE CON LA APLICACIÓN DEL MÉTODO HEURÍSTICO.

En las siguientes líneas se presenta un ejemplo de clase con una de las variantes que presenta el método heurístico, el mencionado ejemplo se ha desarrollado tomando como ejemplo al presentado en el texto "Didáctica de la Matemática" cuyo autor es (Santiago Valiente Barderas, 2000: 76).

PLAN DE CLASE

GRUPO : Experimental

CONTENDIDO : Ecuaciones de primer grado en una variable.

- TEMA : Aplicación de las Ecuaciones de primer grado en una variable, para plantear y resolver problemas sobre ecuaciones.
- CAPACIDAD : Resolver problemas sobre ecuaciones de primer grado en una variable.
- PROBLEMA : Enrique es dos veces mayor que su hermano Santiago. Si las sumas de sus edades es igual a 36, ¿Cuántos años tiene cada uno?

a) Preguntas de exploración:

Docente.- Jóvenes estudiantes, antes de resolver el problema plantado es necesario recordar algunos conceptos que se utilizarán en la solución del problema.

Docente.- ¿Cuál es la definición de variable?

Estudiante.- Es un símbolo, generalmente una letra, que se emplea para designar una cantidad desconocida.

Docente.- ¿Qué es una frase numérica abierta?

Estudiante.- Es toda frase numérica que contiene una o más variables.

Docente.- ¿En qué consiste el valor de una frase numérica abierta?

Estudiante.- Es el número que se obtiene al remplazar la variable por un elemento determinado de su dominio y realizar la simplificación correspondiente.

Docente.- ¿Qué es un enunciado?

Estudiante.-Un enunciado es una expresión que afirma o niega algo.

Docente.- ¿Qué es un enunciado numérico abierto?

Estudiante.- Es un enunciado numérico que contiene una o más frases numéricas abiertas.

Docente.- ¿Qué es una ecuación?

Estudiante.- Una ecuación es un enunciado numérico abierto que contiene el signo de igualdad.

Docente.- ¿Qué significa resolver una ecuación?

Estudiante.- Significa hallar su conjunto solución.

b) Preguntas de presentación.

Docente.- ¿Podrían jóvenes alumnos detallar el esquema que ilustre el procedimiento que permita obtener la solución del problema?

Estudiante.- En la solución de un problema se deben seguir los siguientes pasos o etapas.

- ✓ Leer el problema con todo cuidado.
- ✓ Analizar el problema.
- ✓ Armado de un esquema mental.
- ✓ Ejecución del esquema mental o realización de las operaciones necesarias.
- ✓ Formulación de la respuesta.
- ✓ Verificación del mismo.

c) Preguntas de asimilación.

Docente.- ¿Podrían ustedes desarrollar más específicamente las etapas planteadas en la presentación, luego de haber comprendido el problema?

Estudiante.- vamos a proceder de la siguiente manera.

Primer Paso

Ante todo se debe leer el enunciado verbal dado con el mayor cuidado posible, a fin de estar seguro de haber entendido el significado de todos los términos usados en él.

Segundo Paso.

En la escritura de un enunciado abierto, consiste en escoger un símbolo para representar el número descrito en el enunciado; esto es, denotando con una variable. Diremos entonces: “Sea x la

variable que representa al número desconocido”; o sea la edad de Santiago.

Téngase entendido que es importante señalar lo que representa la variable, sea número de soles, de años, de horas, etc.

Tercer paso.

Consiste en escribir las frases numéricas correspondientes a las frases verbales que expresan las relaciones de la variable con los datos:

Las frases para el problema propuesto son:

“La Edad de Enrique es dos veces más que la de Santiago”..... $2x$.

“La suma de la edad de Santiago y Enrique”..... $x+ 2x$.

Cuarto Paso.-

Consiste en escribir un enunciado abierto; esto es, una ecuación que establezca la condición del problema empleando las frases numéricas.

Se nos dijo que la suma de sus edades es igual a 36, por lo tanto la ecuación es:

$$X + 2x = 36$$

Respecto a este paso diremos que muchas veces aunque el enunciado del problema se puede investigar, que frase numérica es igual a qué otra. Para esto, lo mejor es preguntarse: ¿Qué frase numérica es igual a que otra? la respuesta a esta pregunta es la ecuación.

Quinto paso.- Resolver la ecuación.

$$X + 2x = 36$$

$$3x = 36$$

$$X = 36/3$$

$$X = 12$$

d) Preguntas de organización

Docente.- ¿El, paso que sigue en la solución del problema es?

Estudiante.- Comprobar la solución usando el enunciado del problema y no sustituyendo el valor de la variable en la ecuación, ya que ésta puede estar equivocada. La comprobación de si el valor hallado satisface todas las condiciones estipuladas en el problema es, pues, fundamental.

Docente.- En nuestro caso

Estudiante.- Así, puyes Santiago tendría 12 años y su hermano Enrique, $2x$ $12 = 24$, la suma de sus edades es 36:

$$12 + 24 = 36.$$

Docente.- Entonces ¿Cuál es la respuesta al ejercicio?

Estudiante.- La respuesta es la siguiente:

Santiago tiene 12 años y Enrique 24.

e) Preguntas de aplicación

Docente.- Se tiene el siguiente problema:

Un comerciante vendió 24 lapiceros, algunos a S/. 5 cada uno, y el resto a S/. 7 cada uno. Si por la venta de los 24 lapiceros recibió S/. 132, ¿Cuántos vendió de cada clase?

Alumno.- De acuerdo a lo establecido en el problema anterior, para solucionar este problema implica seguir la siguiente metodología:

- Comprensión del problema a resolverse.
- Identificación de los datos y las incógnitas.

Denotemos el número de lapiceros vendidos a S/. 5 por x .

Entonces:

“El número de lapiceros vendidos a S/. 7 “ $24-x$.

“El número de soles recibidos por la venta de los lapiceros a S/.5” $5x$.

“El Número de de soles recibidos por la venta de los lapiceros a S/.7” $7(24-x)$.

- Planteamiento de la ecuación.

Se nos dijo que por la venta de los 24 lapiceros recibió S/.132; por consiguiente la ecuación es:

Lo recibido por los lapiceros vendidos a S/. 5	más	Lo recibido por los lapiceros vendidos a S/.7	es igual a
$5x$	+	$7(24 - x)$	= 132

- Resolvemos la ecuación:

$$5x + 7(24-x) = 132$$

$$5x + 168 - 7x = 132$$

$$- 2x = 132- 168$$

$$-2x = - 36$$

$$X = 18.$$

- Interpretación de los resultados obtenidos.

Resolviendo esta ecuación se obtiene $x = 18$, lo cual significa que se habían vendido 18 lapiceros a S/. 5 y 6 a S/. 7.

$$\text{Valor de los 18 lapiceros} = 5 \times 18 = 90.$$

$$\text{Valor de los 6 lapiceros} = 7 \times 6 = 42.$$

$$\text{Valor total} = 90 + 42 = 132.$$

2.8. RENDIMIENTO ESCOLAR.

El rendimiento escolar es una forma de expresión del proceso de aprendizaje entendido como cambio de conducta es decir como aparición de habilidades intelectuales (lógicos) o estrategias cognitivas como diría (Gagñe, 1975: 59,80).

El rendimiento escolar para García Zapatero citado por (Odar,1996 :32) es la expresión de las capacidades del estudiante desarrollados y actualizados a través del proceso enseñanza-aprendizaje y que posibilita obtener un nivel de funcionamiento y logro académico a lo largo de un periodo o año escolar ,o también es la medida en que se logran los objetivos de la enseñanza en cuanto a dominios de conocimiento, dominio de habilidades y destrezas en el aspecto conductual o en el comportamiento(Ramírez, 1984 :39), es decir,

que una manera más fácil de medir el rendimiento escolar es la cuantificación usualmente hechas en escalas vigesimales.

La finalidad del proceso de enseñanza-aprendizaje es lograr un rendimiento académico óptimo en los alumnos; teniendo como principal tarea el desarrollo de habilidades y destrezas del estudiante, visto como un proceso constante y permanente y no como un simple instrumento cuantitativo que promueve al estudiante de un año académico a otro.

(Ministerio de Educación ,1988 :56).

Todas estas definiciones apuntan a entender al Rendimiento Escolar como expresiones de calificaciones a través de notas y que en los centros educativos, se mide con escalas vigesimales producto de evaluaciones permanentes. Esta suma de transformaciones que se opera en el pensamiento y en la manera de obrar en los alumnos son registrados a través de un registro de calificaciones producto de exámenes o pruebas de rendimiento y que apoyan en su propio desarrollo de habilidades al manejo de una materia (Labinowiez, 1987:20).

3. MATERIAL Y MÉTODOS

3.1. MATERIAL:

3.1.1. POBLACIÓN.

Estuvo conformado por los alumnos del tercer grado de educación secundaria, haciendo un total de 300 alumnos, en los colegios de la zona urbana del distrito de Cajabamba.

3.1.2. MUESTRA. (precisada por decisión estratégica)

Muestra	Institución Educativa
Grupo de control	30 alumnos de la I.E. “José Gálvez Egúsquiza”.
Grupo experimental	29 alumnos de la I.E. “José sabogal Diéguez” del Distrito de Cajabamba.
Total	59 alumnos.

3.1.3. UNIDAD DE ANÁLISIS.

Se consideró a los sujetos (alumnos).

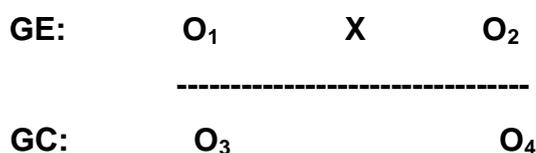
3.2. MÉTODOS:

3.2.1. TIPO DE ESTUDIO.

La investigación es aplicada (tecnológica) y de carácter cuasi-experimental.

3.2.2. DISEÑO DE INVESTIGACIÓN.

La investigación se realizó con el diseño cuasi-experimental de “dos grupos no equivalentes”, cuyo diagrama es el siguiente:



Donde:

O_1 y O_3 : Evaluación del rendimiento académico.

X : Método Heurístico

O_2 y O_4 : Evaluación del rendimiento académico.

Este diseño, según Sánchez y Reyes (1987), “consiste en que una vez que se dispone de los dos grupos, se debe evaluar a ambos en la variable dependiente, luego a uno de ellos se aplica el tratamiento experimental y el otro sigue con las tareas o actividades rutinarias (métodos tradicionales)”.

3.2.3. VARIABLES Y OPERATIVIZACIÓN DE VARIABLES.

- **VARIABLE INDEPENDIENTE:** Método Heurístico.
- **VARIABLE DEPENDIENTE.** Rendimiento académico con la aplicación del método heurístico.
- **VARIABLES EXTRAÑAS.** Sexo, número de alumnos, motivación, asistencia a clases, coeficiente intelectual, condición social.
- **OPERACIONALIZACIÓN DE VARIABLES**

VARIABLES	DEFINICION CONCEPTUAL	DIMENSIONES	INDICADORES	ÍNDICES
a. VARIABLE INDEPENDIENTE. Método heurístico.	“Del griego heurístico = yo encuentro.). “Es un método de enseñanza activo, en el que el docente motiva, incita y guía al, estudiante a través de la	a) Instrucción. b) Diálogo. c) Interrogación d) Método activo.	A) Para la Instrucción.- <ul style="list-style-type: none"> • Utilización de los conocimientos previos de los estudiantes. • Placer inefable por parte del estudiante de descubrir la verdad • Participación del docente como mediador ante las interrogantes y respuestas. • Curiosidad del estudiante de 	a) Definitivamente sí: 5 puntos. b) Probablemente sí: 4 puntos. c) Indeciso: 3 puntos. d) Probablemente no: 2 puntos. e) Definitivamente no: 1 punto.

	interrogación y el diálogo, a comprender, a encontrar razones antes de fijar los conocimientos. El estudiante debe tener oportunidad de descubrir justificaciones o fundamentaciones y debe investigar para ello” (GARCÍA, 1998, 35).		<p>conocer la respuesta correcta</p> <ul style="list-style-type: none"> • Instruirse por propia cuenta en temas similares. <p>B) Para el Diálogo.-</p> <ul style="list-style-type: none"> • Utilización por el docente en el desarrollo del curso del diálogo permanente. • Planteamiento de las interrogantes por parte del docente y las respuestas por parte de los estudiantes. <p>C) Para la Interrogación.-</p> <ul style="list-style-type: none"> • Existencia de una interrogante del docente, para cada respuesta del estudiante. • Mayor atención de los estudiantes a las interrogantes planteadas. • Interrogantes sencillas, breves, correctas y claras. • Interrogantes de las más sencillas a las más complejas. • Interrogantes suficientes y recomendables para el aprendizaje. <p>D) Para el método activo.-</p> <ul style="list-style-type: none"> • Participación activa en las sesiones de Clases del docente y estudiante. • Utilización del método expositivo sin participación de los estudiantes. 	
b. VARIABLE DEPENDIENTE. Rendimiento académico, en el área de	Es una forma de expresión del proceso del aprendizaje entendido como cambio de	a) Ecuaciones de primer grado en una variable. b) Problemas por medio de	A) Resuelve ecuaciones de primer grado y sistemas de ecuaciones utilizando métodos algebraicos por eliminación. B) Resuelve situaciones problemáticas, aplicando ecuaciones de	De 0 a 10 puntos: MALO De 11 a 13 puntos: REGULAR De 14 a 15 puntos:

matemática.	conducta es decir como aparición de habilidades intelectuales(lógicos) o estrategias cognitivas como diría Gagne (1975 pp 59,80)	<p>ecuaciones de primer grado.</p> <p>c) Sistema de Ecuaciones lineales.</p> <p>d) Clasificación de los sistemas de ecuaciones.</p> <p>e) Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones por eliminación.</p> <p>f) Matriz, matriz cuadrada, determinante de segundo y tercer orden (regla de Sarrus)</p> <p>g) Resolución de Sistemas de Ecuaciones usando la regla de Cramer.</p>	<p>primer grado y sistemas de ecuaciones.</p> <p>C) Infiere gráficamente el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos variables.</p> <p>D) Determina cuando un sistema de ecuaciones lineales es compatible o incompatible.</p> <p>E) Formula y elabora estrategias para la resolución de problemas usando la regla de Cramer.</p>	<p>BUENO</p> <p>De 16 a 20 puntos:</p> <p>EXCELENTE</p>
-------------	--	---	---	---

3.2.4. INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS

TÉCNICAS		INSTRUMENTOS
01	Análisis documental	- Fichas textuales, resumen, comentario bibliográfica y de experiencia.

02	Encuesta	- Cuestionario
03	Evaluación	- Prueba de pre-test y pos-test

3.2.5. PROCEDIMIENTOS Y ANÁLISIS ESTADÍSTICOS DE DATOS.

Para hacer el análisis estadístico se utilizaron medidas de tendencia central, medidas de variabilidad, cuadros estadísticos y gráficos, además para la significación de diferencia de medidas se utilizará la prueba estadística “t” de Student a un nivel de significación de 0,05 ó 5%.

4. RESULTADOS.

4.1 PROCEDIMIENTO:

- El desarrollo del experimento o trabajo de campo del presente trabajo de investigación “Influencia del método heurístico para mejorar el rendimiento académico del área de matemática en alumnos del tercer grado de secundaria del distrito de Cajabamba”, se desarrolló en la institución educativa.
- Estatal “José Sabogal Diéguez” del caserío de Parubamba, provincia de Cajabamba, con los alumnos del tercer grado de educación secundaria.
- Se analizó el diseño curricular nacional, en lo que corresponde al área de matemática, grado tercero de educación secundaria.
- A partir del diseño curricular nacional, correspondiente al área de matemática, grado tercero, se elaboraron los contenidos diversificados a desarrollar, los que para ser transferidos a los estudiantes se aplicó el método heurístico.
- Las sesiones de aprendizaje, para aplicar el método heurístico tuvieron el siguiente esquema: Tema a desarrollar, objetivos, preguntas de exploración, preguntas de presentación, preguntas de asimilación, preguntas de organización y preguntas de aplicación.
- Se administró el pre-test para determinar el nivel de conocimientos previos que poseen los alumnos del tercer grado de educación secundaria de la institución educativa “José Sabogal Diéguez” del caserío de Parubamba y de la institución educativa “José Gálvez Egúsqiza”.
- El desarrollo de dicho trabajo de investigación, se llevó a cabo durante los meses de octubre y noviembre, en un total de 10 sesiones de aprendizaje, de 90 minutos cada sesión.
- Los contenidos desarrollados fueron:
 - ✓ Ecuaciones de primer grado en una variable.

- ✓ Problemas por medio de ecuaciones de primer grado.
- ✓ Sistema de ecuaciones lineales.
- ✓ Clasificación de los sistemas de ecuaciones.
- ✓ Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones por eliminación.
- ✓ Matriz, matriz cuadrada, determinante, segundo y tercer orden (regla de Sarrus).
- ✓ Resolución de sistemas de ecuaciones usando la regla de Cramer.
- Se administró el pos-test sesión, para determinar el rendimiento académico, tanto al grupo de experimental como al grupo de control.
- Se administró y corrigió las pruebas de entrada y de salida, en las que se analizó los resultados obtenidos con dichos instrumentos, desde dos puntos de vista:
 - a) Desde el punto de vista de cada ítem.
 - b) Considerando el puntaje total objetivo por los alumnos en la prueba.
- La estadística se realizó utilizando medidas de tendencia central, medidas de variabilidad (desviación estándar, varianza y coeficiente de variación) y aplicando la prueba "t" de Student, para determinar el significado de diferencias de medias.
- Se procesó los datos elaborando un conjunto de cuadros con los resultados del pre-test y pos test del grupo experimental y del grupo de control. Así mismo se elaboró un cuadro de pruebas de hipótesis estadísticas de comparación de promedios.

4.2. INSTRUMENTO DE COLECTA DE DATOS

Cuadro N° 1.- ESTRUCTURA DEL INSTRUMENTO PARA MEDIR LA VARIABLE DEPENDIENTE; RENDIMIENTO ACADÉMICO. (Y).

INDICADORES	ITEMS	N° de ITEMS
Resuelve ecuaciones de primer grado y sistemas de Ecuaciones utilizando métodos algebraicos por eliminación.	1.1,1.2,1.3,1.4.	4
Resuelve situaciones problema-ticas, aplicando ecuaciones de primer grado y sistemas de ecuaciones.	2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7.	7
Infiere gráficamente el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos variables.	3.1,3.2,3.3,3.4.	4
Determina cuando un sistema de ecuaciones lineales es compatible o incompatible.	4.1,4.2.	2
Formula y elabora estrategias para la resolución de problemas usando la regla de Cramer.	5.1,5.2,5.3.	3
TOTAL DE ITEMS		20

4.3. RESULTADOS DE LA PRUEBA DE PRE-TEST GRUPO EXPERIMENTAL.

TABLA N° 1.

N° ORDEN	CALIFICACIÓN		d	d ²
	Letras	Números		
1.	Diez	10	2	4
2.	Ocho	8	0	0
3.	Once	11	3	9
4.	Seis	6	-2	4
5.	Diez	10	2	4
6.	Cinco	5	-3	9
7.	Diez	10	2	4
8.	Diez	10	2	4
9.	Ocho	8	0	0
10.	Diez	10	2	4
11.	Cinco	5	-3	9
12.	Siete	7	-1	1
13.	Nueve	9	1	1
14.	Ocho	8	0	0
15.	Ocho	8	0	0
16.	Nueve	9	1	1
17.	Seis	6	-2	4
18.	Seis	6	-2	4
19.	Once	11	3	9
20.	Cinco	5	-3	9
21.	Siete	7	-1	1
22.	Nueve	9	1	1
23.	Seis	6	-2	4
24.	Ocho	8	0	0
25.	Cinco	5	-3	9
26.	Nueve	9	1	1
27.	nueve	9	1	1
28.	Nueve	9	1	1
29.	Ocho	8	0	0
N° Desaprobados (%)		93%		
N° de Aprobados(%)		7%		
Promedio		8		
Desv.Estándar		1.83829006		
C.V%		23		
TOTAL				98

CÁLCULOS ESTADÍSTICOS.

- a) **Media aritmética.**- El promedio de las calificaciones obtenidas por los alumnos del grupo experimental, en el pre-test.

$$X = \frac{\sum X}{N} = \frac{232}{29} = 8,00$$

- b) **Varianza.**- Esta medida proporciona información sobre el grado de dispersión de los valores de una serie con respecto a su media aritmética, de tal modo que, mientras mayor sea el valor de la varianza, mayor es la dispersión y cuando más pequeña sea la varianza, mayor es la concentración de los datos o valores alrededor de su media aritmética.

$$\text{Var.} = \frac{\sum d^2}{N} \quad \text{Donde:} \quad \frac{98}{29} = 3.4$$

- c) **Desviación estándar.**- Estadígrafo que permite conocer el grado de dispersión de los datos en relación a la media aritmética. Para obtener un valor de este estadígrafo se utiliza la fórmula:

$$DS = \sqrt{\frac{\sum d^2}{N}}$$

Dónde: $DS = \sqrt{3.4} = 1,84$

- d) **Coficiente de variabilidad (CV).**- Determina la homogeneidad o heterogeneidad del grupo o serie estadística que se analiza. Su valor se da en términos de porcentaje.

$$CV = \frac{100(DS)}{X} = \frac{100(1,84)}{8} = 23$$

- e) **La columna “d” de la tabla N° 1,** es la diferencia entre, las notas obtenidos por los estudiantes y la media aritmética.

4.4. RESULTADOS DE LA PRUEBA DE POS-TEST GRUPO EXPERIMENTAL.

TABLA N° 2

N° ORDEN	CALIFICACIÓN		d	d ²
	Letras	Números		
1	Trece	13	-0,3	0,09
2	Doce	12	-1,3	1,69
3	Quince	15	1,7	2,89
4	Trece	13	-0,3	0,09
5	Quince	15	1,7	2,89
6	Doce	12	-1,3	1,69
7	Doce	12	-1,3	1,69
8	Dieciséis	16	2,7	7,29
9	Dieciséis	16	2,7	7,29
10	Catorce	14	0,7	0,49
11	Doce	12	-1,3	1,69
12	Trece	13	-0,3	0,09
13	Trece	13	-0,3	0,09
14	Trece	13	-0,3	0,09
15	Doce	12	-1,3	1,69
16	Quince	15	1,7	2,89
17	Trece	13	-0,3	0,09
18	Catorce	14	0,7	0,49
19	Catorce	14	0,7	0,49
20	Doce	12	-1,3	1,69
21	Catorce	14	0,7	0,49
22	Doce	12	-1,3	1,69
23	Trece	13	-0,3	0,09
24	Trece	13	-0,3	0,09
25	Doce	12	-1,3	1,69
26	Doce	12	-1,3	1,69
27	Quince	15	1,7	2,89
28	Doce	12	-1,3	1,69
29	Trece	13	-0,3	0,09
N° Desaprobados (%)		0%		
N° Aprobados(%)		100%		
Promedio		13.2758621		
Desv. Estándar		1.25661153		
C.V%		9,5		
TOTAL			45,81	

CÁLCULOS ESTADÍSTICOS.

a) Media aritmética.-

$$X = \frac{\sum X}{N} = \frac{385}{29} = 13,3$$

B Varianza.-

$$\text{Var.} = \frac{\sum d^2}{N} \quad \text{Donde:} \quad \frac{45,81}{29} = 1,6$$

c) Desviación estándar.-

$$DS = \sqrt{\frac{\sum d^2}{N}}$$

$$\text{Dónde:} \quad DS = \sqrt{1,6} = 1,26$$

d) Coeficiente de variabilidad (CV).-

$$CV = \frac{100(DS)}{X} = \frac{100(1,26)}{13,3} = 9,5$$

e) La columna “d” de la tabla N° 1, es la diferencia entre, las notas obtenidos por los estudiantes y la media aritmética.

4.5. RESULTADOS DE LA PRUEBA DE PRE-TEST GRUPO CONTROL

TABLA N° 3.

N° ORDEN	CALIFICACIÓN		d	d ²
	Letras	Números		
1.	Nueve	9	0,2	0,04
2.	Ocho	8	-0,8	0,64
3.	Siete	7	-1,8	3,24
4.	Cinco	5	-3,8	14,44
5.	Ocho	8	-0,8	0,64
6.	Cuatro	4	-4,8	23,04
7.	Once	11	2,2	4,84
8.	Diez	10	1,2	1,44
9.	Diez	10	1,2	1,44
10.	Once	11	2,2	4,84
11.	Diez	10	1,2	1,44
12.	Diez	10	1,2	1,44
13.	Diez	10	1,2	1,44
14.	Once	11	2,2	4,84
15.	Once	11	2,2	4,84
16.	Once	11	2,2	4,84
17.	Diez	10	1,2	1,44
18.	Nueve	9	0,2	0,04
19.	Once	11	2,2	4,84
20.	Diez	10	1,2	1,44
21.	Diez	10	1,2	1,44
22.	Nueve	9	0,2	0,04
23.	Seis	6	-2,8	7,84
24.	Seis	6	-2,8	7,84
25.	Diez	10	1,2	1,44
26.	Siete	7	-1,8	3,24
27.	Seis	6	-2,8	7,84
28.	Cinco	5	-3,8	14,44
29.	Nueve	9	0,2	0,04
30.	nueve	9	0,2	0,04
N° Desaprobados (%)		80%		
N° Aprobados(%)		20%		
Promedio		8.76666667		
Desv. Estándar		2.04423308		
C.V.%		23.2		
TOTAL				125.4

CÁLCULOS ESTADÍSTICOS.

- a) **Media aritmética.**- El promedio de las calificaciones obtenidas por los alumnos del grupo control, en el pre-test.

$$X = \frac{\sum X}{N} = \frac{263}{30} = 8,8$$

- b) **Varianza.**- Esta medida proporciona información sobre el grado de dispersión de los valores de una serie con respecto a su media aritmética, de tal modo que, mientras mayor sea el valor de la varianza, mayor es la dispersión y cuando más pequeña sea la varianza, mayor es la concentración de los datos o valores alrededor de su media aritmética.

$$\text{Var.} = \frac{\sum d^2}{N} \quad \text{Donde:} \quad \frac{125,4}{30} = 4,18$$

- c) **Desviación estándar.**- Estadígrafo que permite conocer el grado de dispersión de los datos en relación a la media aritmética. Para obtener un valor de este estadígrafo se utiliza la fórmula:

$$DS = \sqrt{\frac{\sum d^2}{N}}$$

$$\text{Dónde:} \quad DS = \sqrt{4,18} = 2,04$$

- d) **Coefficiente de variabilidad (CV).**- Determina la homogeneidad o heterogeneidad del grupo o serie estadística que se analiza. Su valor se da en términos de porcentaje.

$$CV = \frac{100(DS)}{X} = \frac{100(2,04)}{8} = 23,2$$

- e) **La columna “d” de la tabla N° 1,** es la diferencia entre, las notas obtenidos por los estudiantes y la media aritmética.

4.6. RESULTADOS DE LA PRUEBA DE POS-TEST GRUPO CONTROL.

TABLA N° 4

N° ORDEN	CALIFICACIÓN		d	d ²
	Letras	Números		
1	Nueve	9	0,8	0,64
2	Diez	10	1,8	3,24
3	Once	11	2,8	7,84
4	Ocho	8	-0,2	0,04
5	Siete	7	-1,2	1,44
6	Seis	6	-2,2	4,84
7	Seis	6	-2,2	4,84
8	Cinco	5	-3,2	10,24
9	Nueve	9	0,8	0,64
10	Ocho	8	-0,2	0,04
11	Siete	7	-1,2	1,44
12	Nueve	9	0,8	0,64
13	Nueve	9	0,8	0,64
14	Nueve	9	0,8	0,64
15	Seis	6	-2,2	4,84
16	Nueve	9	0,8	0,64
17	Diez	10	1,8	3,24
18	Diez	10	1,8	3,24
19	Diez	10	1,8	3,24
20	Once	11	2,8	7,84
21	Once	11	2,8	7,84
22	Ocho	8	-0,2	0,04
23	Nueve	9	0,8	0,64
24	Ocho	8	-0,2	0,04
25	Siete	7	-1,2	1,44
26	Seis	6	-2,2	4,84
27	Cinco	5	-3,2	10,24
28	Siete	7	-1,2	1,44
29	Ocho	8	-0,2	0,04
30	Ocho	8	-0,2	0,04
N° Desaprobados (%)		90%		
N° Aprobados (%)		10%		
Promedio		8.2		
Desv, Estándar		1.70098011		
C.-V. %		20,73		
TOTAL				86,8

CÁLCULOS ESTADÍSTICOS.

a) Media aritmética.-

$$X = \frac{\sum X}{N} = \frac{246}{30} = 8,2$$

b) Varianza.-

$$\text{Var.} = \frac{\sum d^2}{N} \quad \text{Donde:} \quad \frac{86,8}{30} = 2,89$$

c) Desviación estándar.-

$$DS = \sqrt{\frac{\sum d^2}{N}}$$

$$\text{Dónde:} \quad DS = \sqrt{2,89} = 1,7$$

d) Coeficiente de variabilidad (CV).-

$$CV = \frac{100(DS)}{X} = \frac{100(1,7)}{8,2} = 20,73$$

e) La columna “d” de la tabla N° 1, es la diferencia entre, las notas obtenidos por los estudiantes y la media aritmética.

4.7 COMPARACIÓN DEL NIVEL DE RENDIMIENTO ACADÉMICO DE LA MATEMÁTICA.

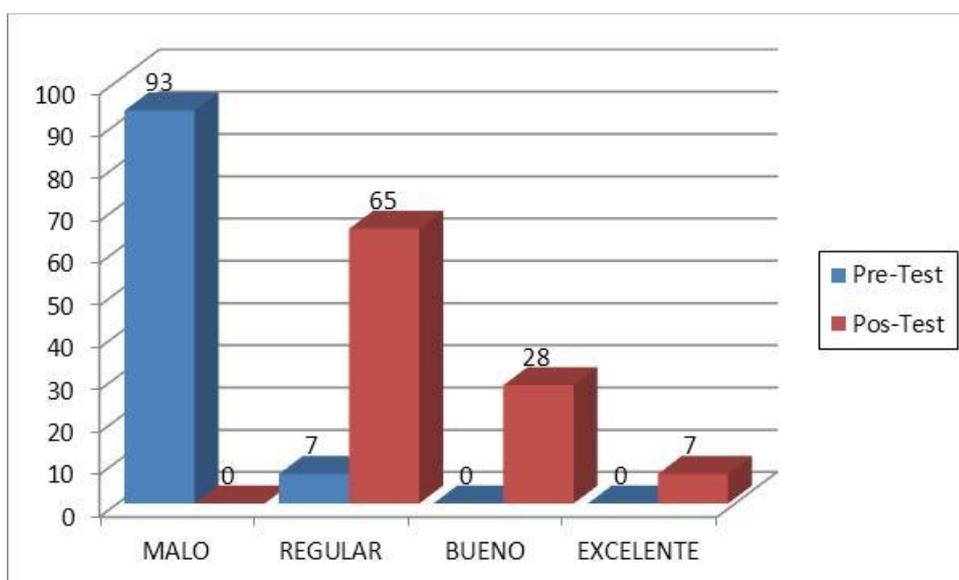
Tabla Nº 05
Nivel de rendimiento académico de matemática
Grupo experimental.

Nivel de Aprendizaje	Pre-Test		Post-Test	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Malo	27	93	0	0
Regular	2	7	19	65
Bueno	0	0	8	28
Excelente	0	0	2	7
TOTAL	29	100	29	100

Fuente:Tabla 3

Elaboración: Ejecutor de tesis

GRÁFICO Nº 01
Comparación del nivel de rendimiento académico de matemática.
Grupo experimental



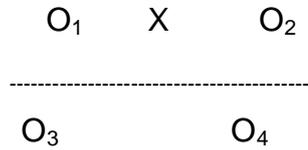
Fuente: Tabla 3

Elaboración: Ejecutor de tesis

4.8. PRUEBA DE HIPÓTESIS CON EL TEST “t” de ESTUDENT

Análisis a:

1°) Del diseño de investigación.

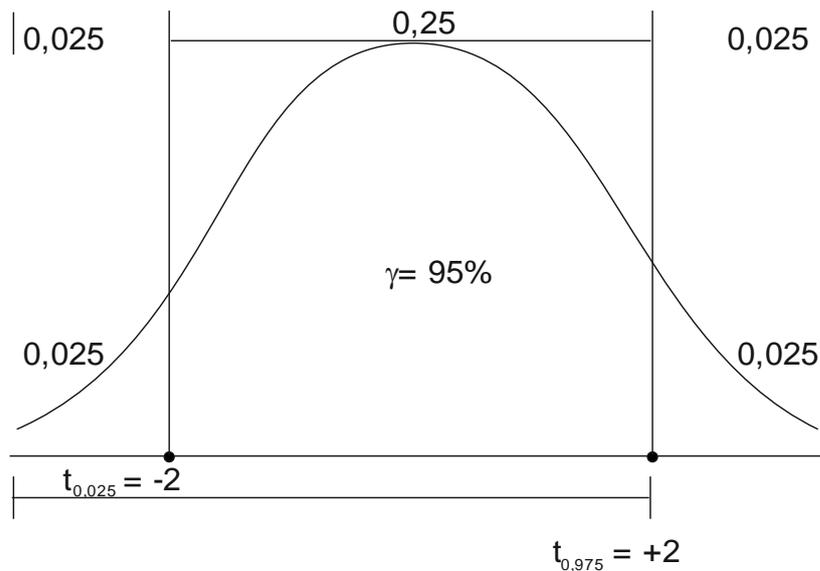


Tomamos los grupos O_1 y O_3 , para compararlos.

2°) Medidas de resumen de los grupos.

Muestras	n	M	x	y	s _x	s _y
Pre-test.G.C	30	-	8,8	-	2,04	-
Pre-test.G.E.	-	29	-	8	-	1,84

3°) Hallamos el valor crítico en la tabla t de Student.



$$Gl = n + m - 2 = 30 + 29 - 2 = 57$$

Nivel de significación $\alpha = 5\%$.

4. Formulación de las hipótesis.

H₀: La Aplicación del Método Heurístico, no es altamente eficaz, en la enseñanza-aprendizaje del área de matemática (Ecuaciones) en los alumnos del Tercer Grado de Secundaria del Distrito de Cajabamba.

$$H_0: \mu_1 = \mu_3$$

H₁: La Aplicación del Método Heurístico, es altamente eficaz, en la enseñanza-aprendizaje del área de matemática (Ecuaciones) en los alumnos del Tercer Grado de Secundaria del Distrito de Cajabamba.

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_3$$

5. Esquema de prueba.



3º) Estadístico de prueba. Se utiliza la distribución t, de dos medias. (Acosta, 2000:181).

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}} \sqrt{\frac{n \cdot m(n+m-2)}{n+m}}$$

Remplazando valores obtenemos:

$$t = \frac{8,8-8,0}{\sqrt{29x(2.04)^2+28x(1.84)^2}} \sqrt{\frac{30.29(30+29-2)}{59}}$$

$$t = \frac{0,8}{\sqrt{29x4.1616+28x3,3856}} \sqrt{\frac{870x57}{59}}$$

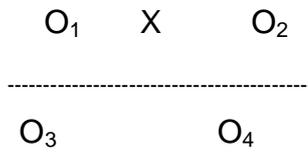
$$t = \frac{0,8}{\sqrt{120,7+94,8}} \sqrt{\frac{49590}{59}} \qquad t = \frac{0,8}{\sqrt{215,5}} \sqrt{840,5085}$$

$$t = \frac{0,8}{14,7} x 28,992 \qquad t = \frac{23,194}{14,7} \qquad t = 1,58$$

Como: $t_c < t_t$ cae en la región de aceptación, es decir H_0 se acepta, lo que significa que $U_1 = U_3$ lo que nos indica que los promedios no son significativamente diferentes; por lo tanto (no existen diferencias significativas en los promedios).

Análisis b:

1°) Del diseño de investigación.

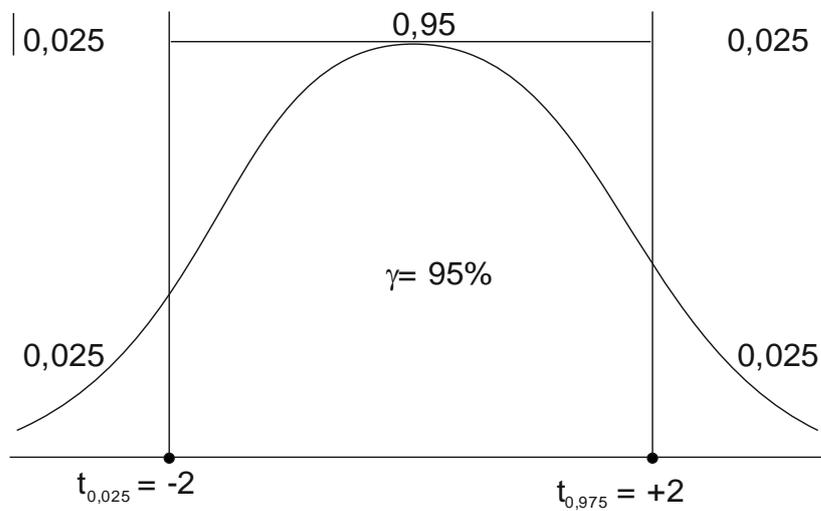


Tomamos los grupos O₂ y O₄, para compararlos.

2°) Medidas de resumen de los grupos.

Muestras	n	M	x	y	s _x	s _y
Post-test.G.E	29	-	13,3	-	1,26	-
Post-test.G.C.	-	30	-	8,2	-	1,7

3°) Hallamos el valor crítico en la tabla t de Student.



$Gl = n + m - 2 = 30 + 29 - 2 = 57$

Nivel de significación $\alpha = 5\%$.

4. Formulación de las hipótesis.

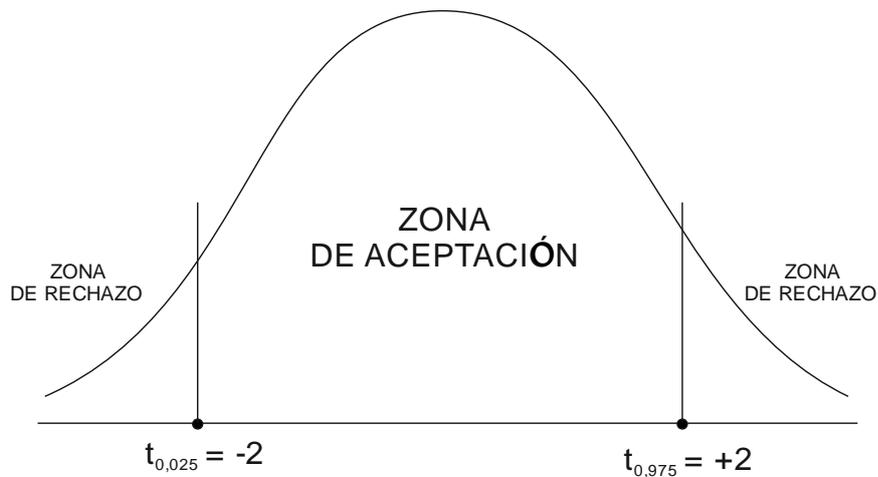
H₀: La Aplicación del Método Heurístico, no es altamente eficaz, en la enseñanza-aprendizaje del área de matemática (Ecuaciones) en los alumnos del Tercer Grado de Secundaria del Distrito de Cajabamba.

$$H_0: \mu_2 = \mu_4$$

H₁: La Aplicación del Método Heurístico, es altamente eficaz, en la enseñanza-aprendizaje del área de matemática (Ecuaciones) en los alumnos del Tercer Grado de Secundaria del Distrito de Cajabamba.

$$H_1 : \mu_2 \neq \mu_4$$

5. Esquema de prueba.



3º) Estadístico de prueba. Se utiliza la distribución t, de dos medias. (Acosta, 2000:181).

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}} \sqrt{\frac{n \cdot m(n+m-2)}{n+m}}$$

Remplazando valores obtenemos:

$$t = \frac{13,3-8,2}{\sqrt{28x(1,26)^2+29x(1,7)^2}} \sqrt{\frac{29.30(30+29-2)}{59}}$$

$$t = \frac{5,1}{\sqrt{29x1,5876+29x2,89}} \sqrt{\frac{870x57}{59}}$$

$$t = \frac{5,1}{\sqrt{44,4528+83,81}} \sqrt{\frac{49590}{59}}$$

$$t = \frac{5,1}{\sqrt{128,2628}} \sqrt{840,5085}$$

$$t = \frac{5,1}{11,33} x 28,992$$

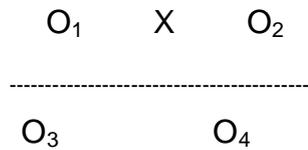
$$t = \frac{147,8592}{11,33}$$

$$t = 13,1$$

Como: $t_{c=13,1}$ cae en la región de rechazo, es decir H_0 se rechaza y se acepta H_1 , lo que significa que los resultados de los promedios de los posttest son significativamente diferentes.

Análisis c:

1°) Del diseño de investigación.

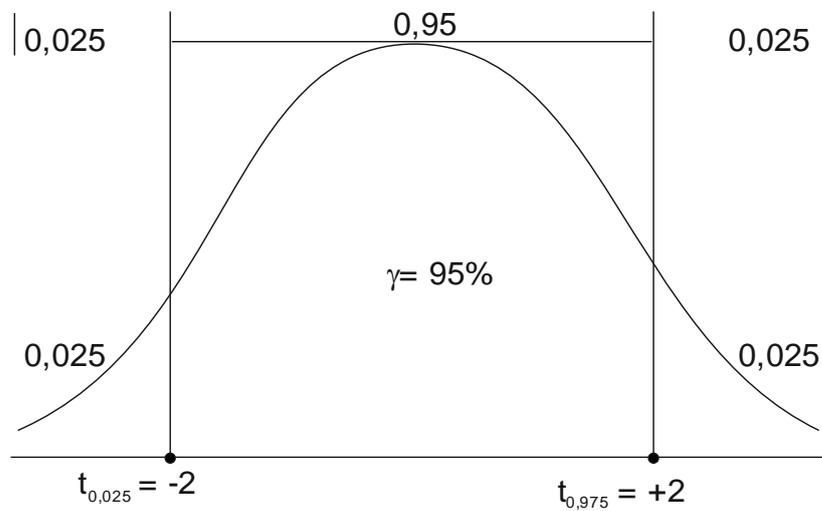


Tomamos los grupos O_1 y O_2 , para compararlos.

2°) Medidas de resumen de los grupos.

Muestras	n	M	x	y	S _x	S _y
Post-test.G.E	29	-	13,3	-	1,26	-
Pre-test.G.C.	-	29	-	8	-	1,84

3°) Hallamos el valor crítico en la tabla t de Student.



$$Gl = n + m - 2 = 29 + 29 - 2 = 56$$

Nivel de significación $\alpha = 5\%$.

4. Formulación de las hipótesis.

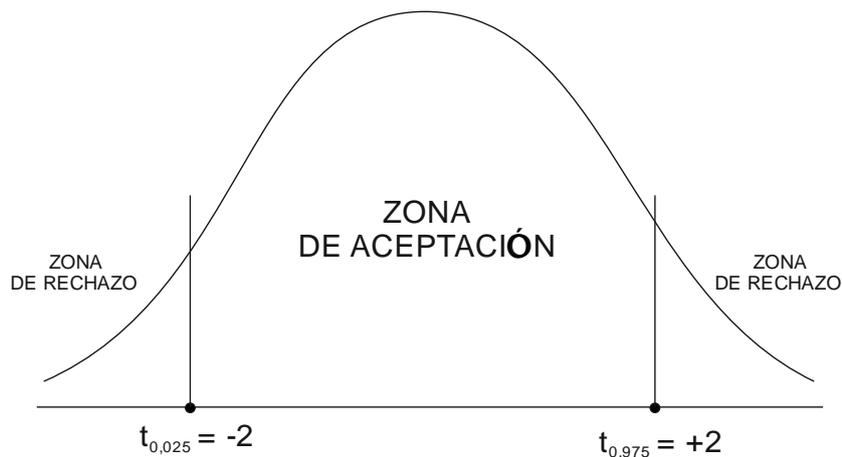
H₀: La Aplicación del Método Heurístico, no es altamente eficaz, en la enseñanza-aprendizaje del área de matemática (Ecuaciones) en los alumnos del Tercer Grado de Secundaria del Distrito de Cajabamba.

$$H_0: u_1 = u_2$$

H₁: La Aplicación del Método Heurístico, es altamente eficaz, en la enseñanza-aprendizaje del área de matemática (Ecuaciones) en los alumnos del Tercer Grado de Secundaria del Distrito de Cajabamba.

$$H_1 : u_1 \neq u_2$$

5. Esquema de prueba.



3º) Estadístico de prueba. Se utiliza la distribución t, de dos medias. (Acosta, 2000:181).

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}} \sqrt{\frac{n \cdot m(n+m-2)}{n+m}}$$

Reemplazando valores obtenemos:

$$t = \frac{13,3-8}{\sqrt{28x(1,26)^2+28x(1,84)^2}} \sqrt{\frac{29 \cdot 29(290+29-2)}{58}}$$

$$t = \frac{5,3}{\sqrt{29x1,5876+29x3,3856}} \sqrt{\frac{841x56}{58}}$$

$$t = \frac{5,3}{\sqrt{44,4528+94,7968}} \sqrt{\frac{47096}{58}} \qquad t = \frac{5,3}{\sqrt{139,2496}} \sqrt{812}$$

$$t = \frac{5,1}{11,80041} x 28,4956 \qquad t = \frac{151,02668}{11,80041} \qquad t = 12,79$$

Como: $t_{c=12,79}$ cae en la región de rechazo, es decir H_0 se rechaza y se acepta H_1 , lo que significa que los resultados de los promedios del pretest y postest del grupo experimental son significativamente diferentes.

4.9 DE LA ENCUESTA SOBRE EL MÉTODO HEURÍSTICO.

La aplicación del instrumento: encuesta; se aplicó a 29 alumnos de la sección del tercer grado de educación secundaria de la Institución Educativa “José Sabogal Diéguez”, del caserío de Parubamba, Distrito de Cajabamba, toda vez que este grupo de alumnos recibió la enseñanza, con la utilización del método heurístico. El documento de encuesta consta de 14 ítems, que se refiere a las características del método heurístico.

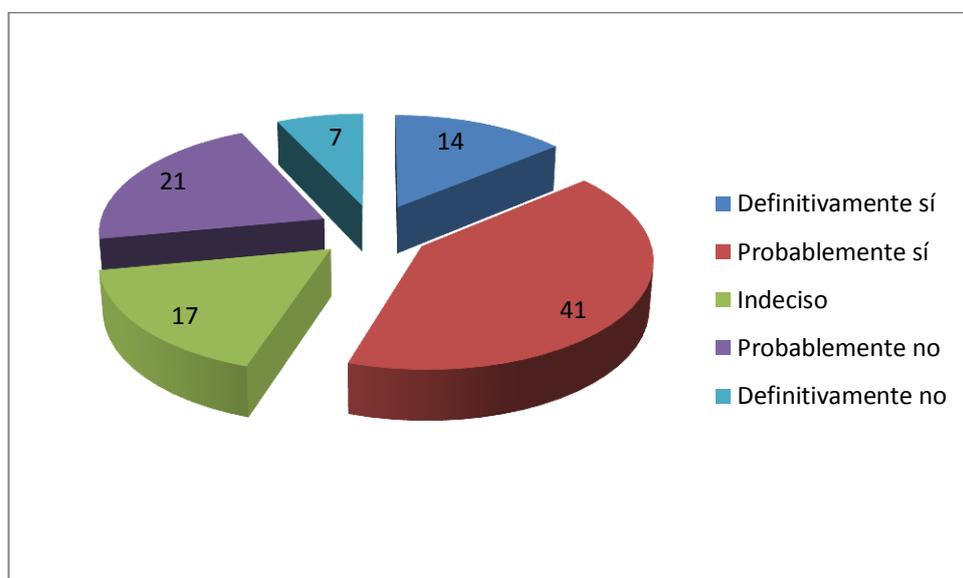
4.9.1 RESULTADOS Y ANÁLISIS DE LOS DATOS DE LA ENCUESTA SOBRE CARACTERÍSTICAS DEL MÉTODO HEURÍSTICO

Para el análisis inicial de la información recolectada luego de la aplicación de la encuesta, se ha utilizado las frecuencias acumulativas y porcentuales de las preferencias por parte de los estudiantes a cada una de las 5 posibilidades que se les presentó en cada ítem de la encuesta: las siguientes tablas muestran estos resultados

Tabla N° 3.- UTILIZACIÓN DE CONOCIMIENTOS PREVIOS.

INDICADOR	FRECUENCIA(F)	PORCENTAJES (%)
Definitivamente sí	4	14
Probablemente sí	12	41
Indeciso	5	17
Probablemente no	6	21
Definitivamente no	2	7
TOTAL	29	100

GRÁFICO N° 3



Fuente : Tabla N° 3

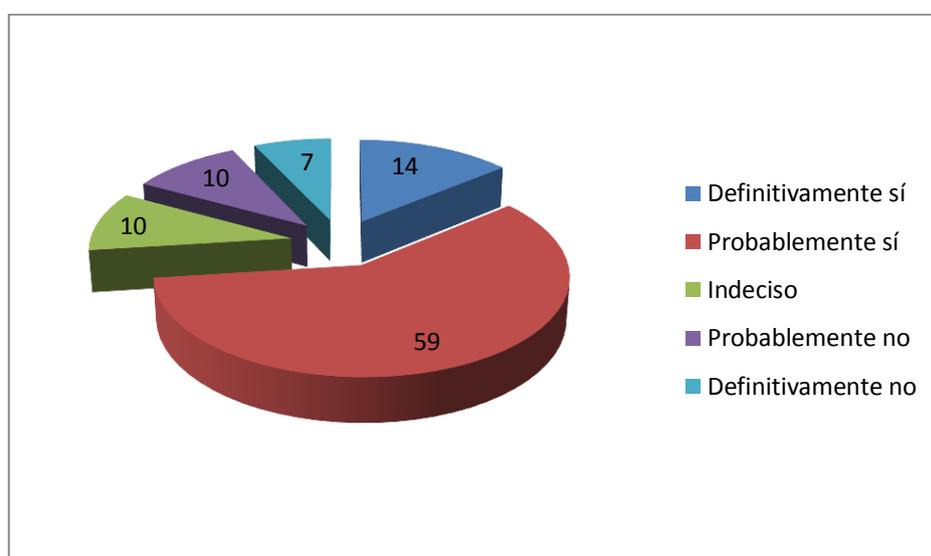
Elaboración : Ejecutor de tesis

Se preguntó a los estudiantes si el docente en todo momento del desarrollo de las sesiones de clase utilizó los conocimientos previos de los estudiantes con respecto al tema de clase, el 14% opina que definitivamente sí y el 41% opina probablemente sí; adicionando estos dos porcentajes se tiene un considerable 55% de opinión favorable y si los indecisos no son considerados se tiene un 28% de opinión desfavorable.

Tabla N° 4.- PLACER INEFABLE DE DESCUBRIR LA VERDAD

INDICADOR	FRECUENCIA(F)	PORCENTAJES (%)
Definitivamente sí	4	14
Probablemente sí	17	59
Indeciso	3	10
Probablemente no	3	10
Definitivamente no	2	7
TOTAL	29	100

GRÁFICO N° 4



Fuente : Tabla N° 4

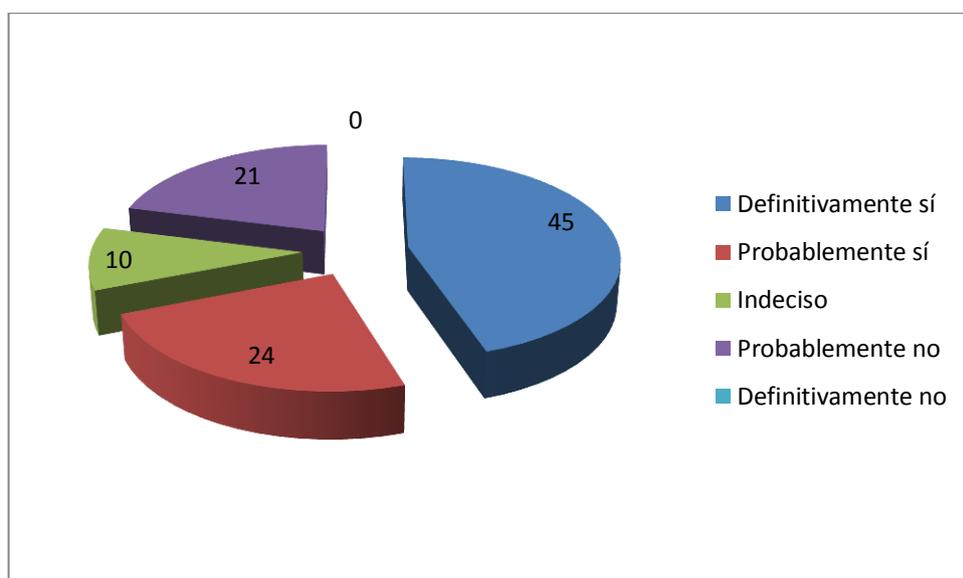
Elaboración : Ejecutor de tesis

En relación a que en cada una de las interrogantes planteadas por el docente al desarrollar el tema de clase, ha experimentado un placer inefable de descubrir la verdad con el establecimiento de la respuesta correspondiente, 14% de los estudiantes manifiestan que definitivamente sí y si a esta cantidad se le adiciona el 59% de los probablemente sí, entonces se tiene un nivel de opinión favorable de un considerable 73%, sin considerar a los indecisos se tiene un escaso 17% de opinión desfavorable.

Tabla N° 5.- DOCENTE MEDIADOR ANTE LAS INTERROGANTES Y RESPUESTAS.

INDICADOR	FRECUENCIA(F)	PORCENTAJES (%)
Definitivamente sí	13	45
Probablemente sí	7	24
Indeciso	3	10
Probablemente no	6	21
Definitivamente no	0	0
TOTAL	29	100

GRÁFICO N° 5



Fuente : Tabla N° 5

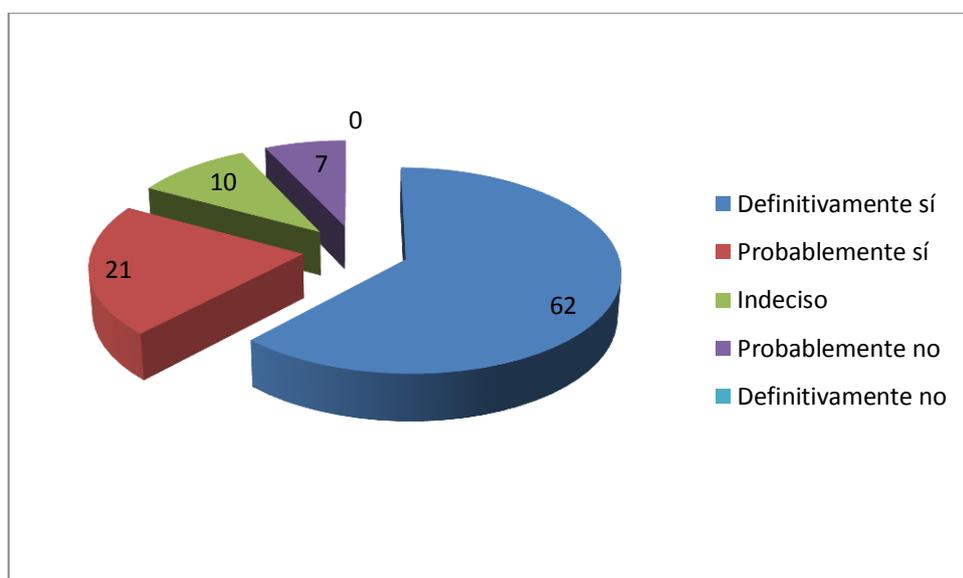
Elaboración : Ejecutor de tesis

El 45% de los estudiantes manifiestan que definitivamente sí, el docente en el desarrollo de las sesiones de clase se comportó como mediador ante las interrogantes planteadas por parte del profesor y las respuestas por parte de los estudiantes; así como un 24%, manifiestan que probablemente sí, lo que en conjunto hacen 69% de opinión favorable; mientras que un escaso 21% se manifestaron con opinión desfavorable.

Tabla N° 6.- CURIOSIDAD DE CONOCER LA RESPUESTA CORRECTA.

<i>INDICADOR</i>	<i>FRECUENCIA(F)</i>	<i>PORCENTAJES (%)</i>
Definitivamente sí	18	62
Probablemente sí	6	21
Indeciso	3	10
Probablemente no	2	7
Definitivamente no	0	0
TOTAL	29	100

GRÁFICO N° 6



Fuente : Tabla N° 6

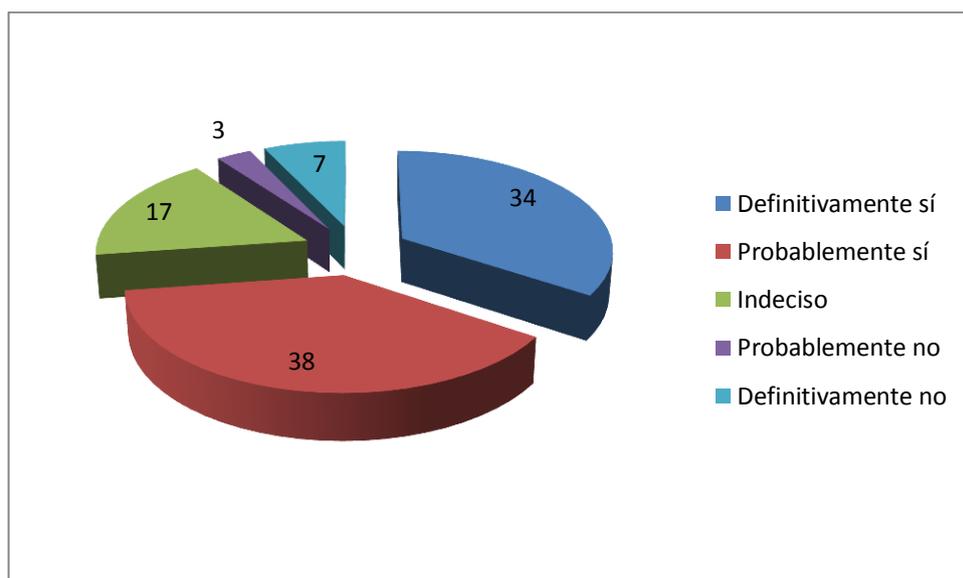
Elaboración : Ejecutor de tesis

Ante la pregunta de que si en cada una de las interrogantes formuladas por el docente en el desarrollo de las clases, sintió la curiosidad de conocer la respuesta correcta, adicionando las opiniones definitivamente sí 62% y probablemente sí 21%, se tienen un 83% de opinión favorable mientras que si no se consideran a los indecisos se tiene tan solamente un 7% de opinión desfavorable.

Tabla N° 7.- INSTRUIRSE EN TEMAS SIMILARES POR CUENTA PROPIA

<i>INDICADOR</i>	<i>FRECUENCIA(F)</i>	<i>PORCENTAJES (%)</i>
Definitivamente sí	10	34
Probablemente sí	11	38
Indeciso	5	17
Probablemente no	1	3
Definitivamente no	2	7
TOTAL	29	100

GRÁFICO N° 7



Fuente : Tabla N° 7

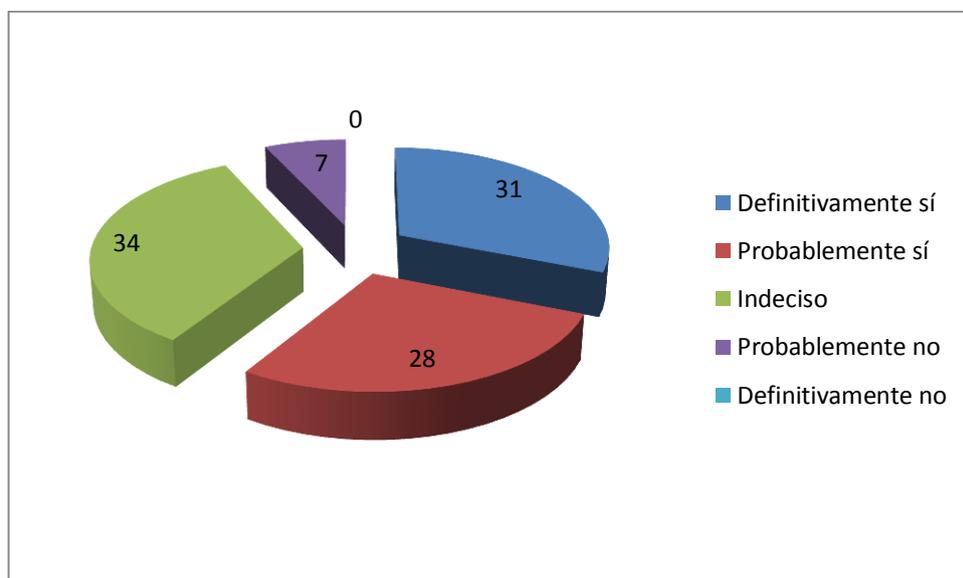
Elaboración : Ejecutor de tesis

En la tabla N° 7, se puede observar que un 34% manifiesta su opinión muy favorable a la posibilidad de instruirse por su propia cuenta en temas similares a las recibidas en las sesiones de clase y un 38% opina favorablemente lo que en conjunto hacen un 72% de aprobación, mientras que si no consideran a los indecisos solamente un 10% opina desfavorablemente.

Tabla N° 8.- DIÁLOGO PERMANENTE.

INDICADOR	FRECUENCIA(F)	PORCENTAJES (%)
Definitivamente sí	9	31
Probablemente sí	8	28
Indeciso	10	34
Probablemente no	2	7
Definitivamente no	0	0
TOTAL	29	100

GRÁFICO N° 8



Fuente : Tabla N° 8

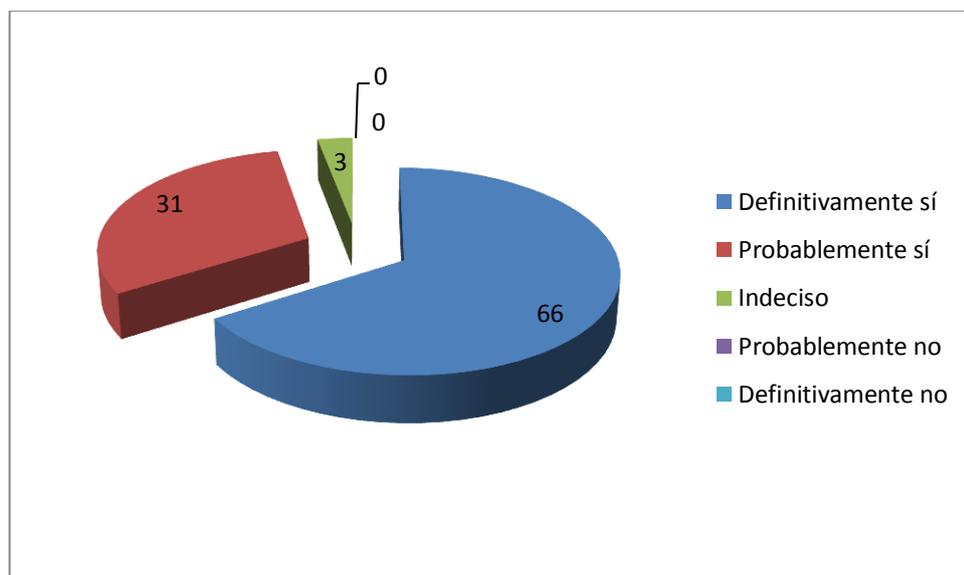
Elaboración : Ejecutor de tesis

Teniendo en cuenta que un 31% opinan muy favorablemente con relación a que en las sesiones de clase se practicó el diálogo permanente y así mismo un 28% opinan favorablemente, entonces se tiene 59% de opinión favorable, sin considerar a los indecisos que son la gran mayoría 34%, solamente se tiene un 7% de opinión desfavorable.

Tabla N° 9.- INTERROGANTES POR EL DOCENTE Y RESPUESTAS POR EL ESTUDIANTE.

<i>INDICADOR</i>	<i>FRECUENCIA(F)</i>	<i>PORCENTAJES (%)</i>
Definitivamente sí	19	66
Probablemente sí	9	31
Indeciso	1	3
Probablemente no	0	0
Definitivamente no	0	0
TOTAL	29	100

GRÁFICO N° 9



Fuente : Tabla N° 9

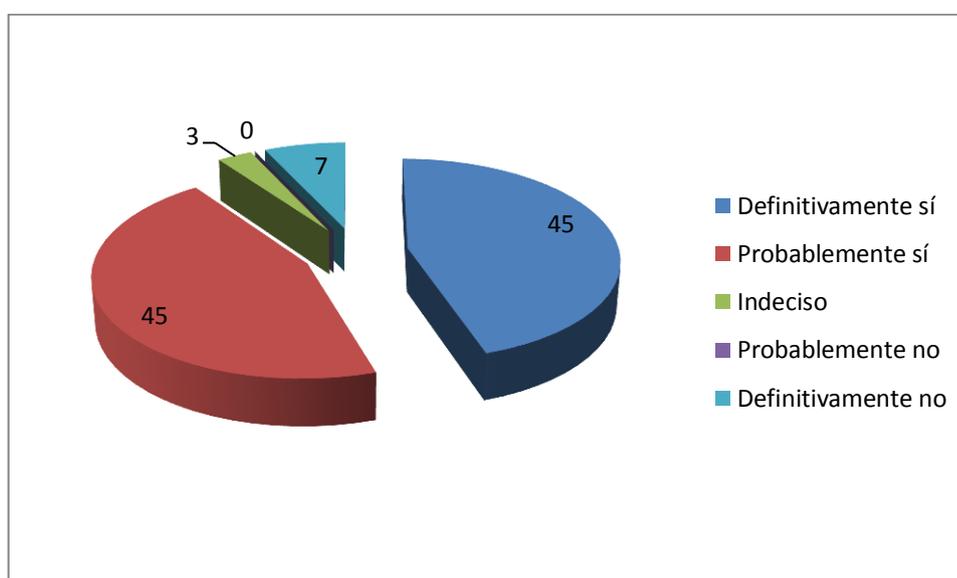
Elaboración : Ejecutor de tesis

Un 66% respondieron definitivamente sí, a la consulta de que sí las interrogantes fueron planteadas por el docente y las respuestas por los estudiantes y un 31% probablemente sí, los que constituyen en conjunto un 97% de opinión favorable; sin considerar a los indecisos no se tiene opinión desfavorable.

Tabla N° 10.- INTERROGANTE PREVIA PARA CADA RESPUESTA.

INDICADOR	FRECUENCIA(F)	PORCENTAJES (%)
Definitivamente sí	13	45
Probablemente sí	13	45
Indeciso	1	3
Probablemente no	0	0
Definitivamente no	2	7
TOTAL	29	100

GRÁFICO N° 10



Fuente : Tabla N° 10

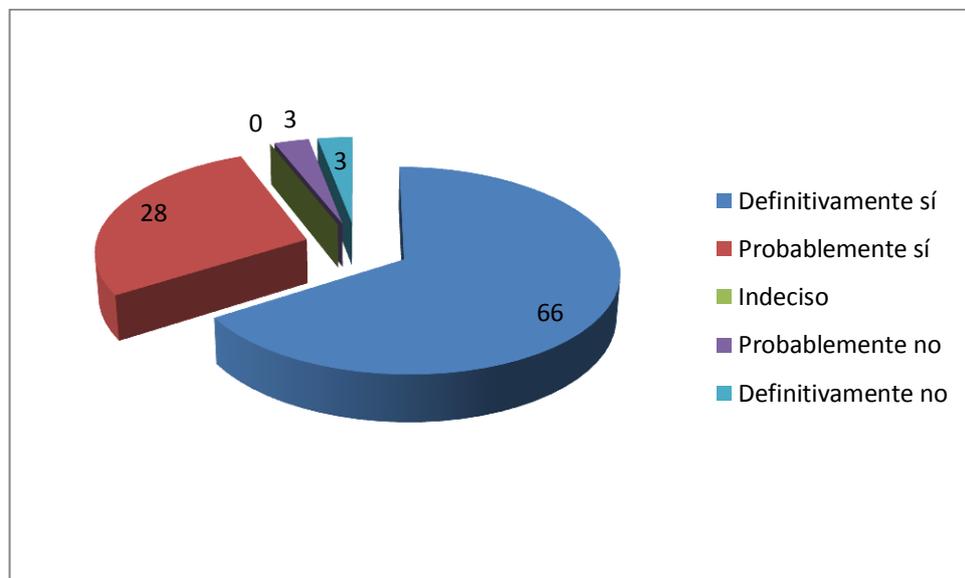
Elaboración : Ejecutor de tesis

Ante la interrogante de que en el desarrollo de las clases para cada respuesta existió previamente una interrogante, una gran mayoría de estudiantes: 45% manifiesta que definitivamente sí, si a este porcentaje se le adiciona el 45% de estudiantes que manifiestan probablemente sí, entonces se tiene un 90% o 26 estudiantes de 29, de opinión favorable; sin considerar a los indecisos se tiene solamente un escaso 7% de opinión desfavorable.

Tabla N° 11.- ATENCIÓN A LAS INTERROGANTES.

INDICADOR	FRECUENCIA(F)	PORCENTAJES (%)
Definitivamente sí	19	66
Probablemente sí	8	28
Indeciso	0	0
Probablemente no	1	3
Definitivamente no	1	3
TOTAL	29	100

GRÁFICO N° 11



Fuente : Tabla N° 11

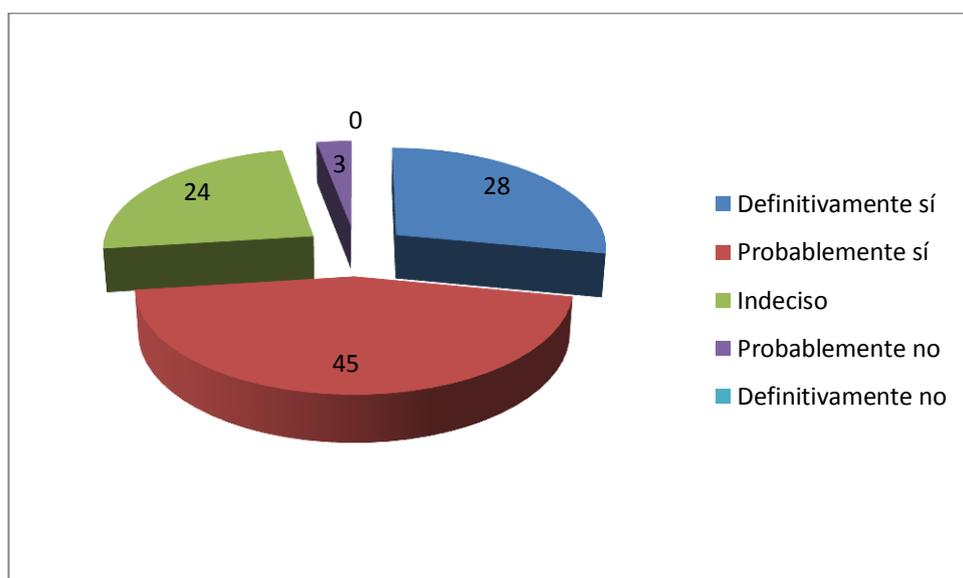
Elaboración : Ejecutor de tesis

El 66% de los estudiantes opinan definitivamente sí, en el sentido de que las interrogantes planteadas por el docente es las sesiones de clase, llamaron su atención; 28% manifiestan probablemente sí, lo que en conjunto constituye un 94% de opinión favorable; solamente un 6% de los estudiantes se manifestaron con opinión desfavorable.

Tabla N° 12.- INTERROGANTES SENCILLAS, ENTENDIBLES, CLARAS, CORRECTAS Y BREVES.

<i>INDICADOR</i>	<i>FRECUENCIA(F)</i>	<i>PORCENTAJES (%)</i>
Definitivamente sí	8	28
Probablemente sí	13	45
Indeciso	7	24
Probablemente no	1	3
Definitivamente no	0	0
TOTAL	29	100

GRÁFICO N° 12



Fuente : Tabla N° 12

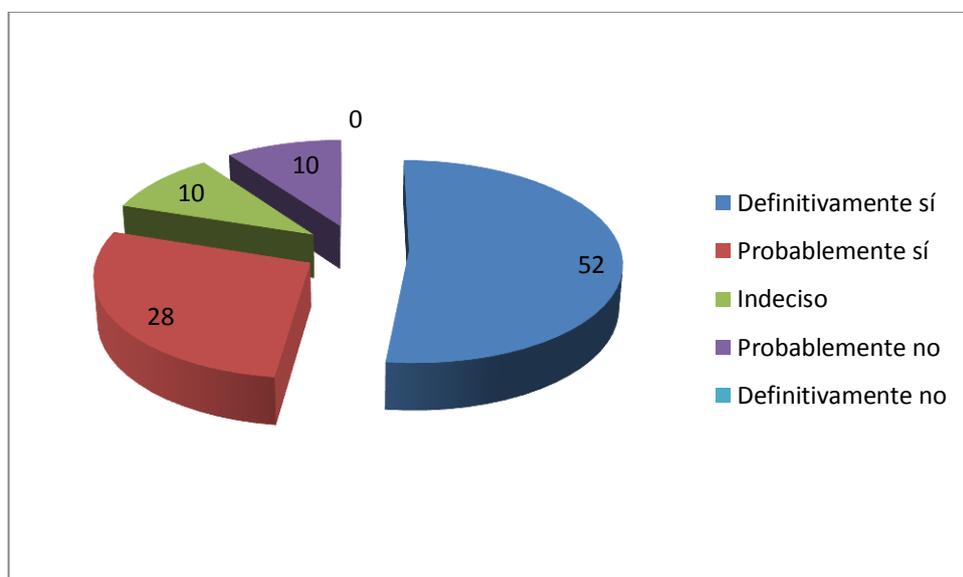
Elaboración : Ejecutor de tesis

Encuestados los estudiantes acerca de que sí en el desarrollo de las sesiones de clase las interrogantes planteadas por el docente fueron sencillas, entendibles, claras, correctas y breves; la tabla N° 12 muestra que un 28% manifiesta definitivamente sí y un 45% que probablemente sí, lo que en conjunto resultan una mayoría de opinión favorable de un 73%; sin contar a los indecisos que son un 24%, se observa solamente un 3% de opinión desfavorable.

Tabla N° 13.- INTERROGANTES DE LAS SIMPLES A LAS COMPLEJAS.

<i>INDICADOR</i>	<i>FRECUENCIA(F)</i>	<i>PORCENTAJES (%)</i>
Definitivamente sí	15	52
Probablemente sí	8	28
Indeciso	3	10
Probablemente no	3	10
Definitivamente no	0	0
TOTAL	29	100

GRÁFICO N° 13



Fuente : Tabla N° 13

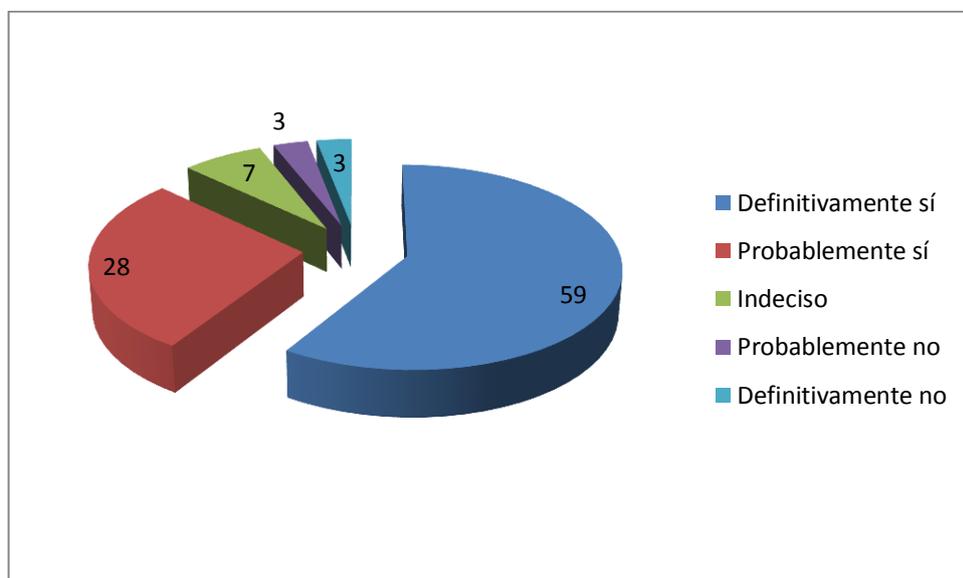
Elaboración : Ejecutor de tesis

La tabla N° 13, registra las respuestas de los estudiantes ante la consulta de que si las interrogantes planteadas concordaron con la secuencia del desarrollo de las sesiones de clase y fueron desde las más sencillas a las más complejas; de este registro, un 52% manifiestan definitivamente sí y un 28% manifiestan probablemente sí, que en conjunto significan un 80% de opinión favorable, sin considerar a los indecisos, se observa que un 10% de opinión desfavorable.

Tabla N° 14.- INTERROGANTES PARA EL APRENDIZAJE.

<i>INDICADOR</i>	<i>FRECUENCIA(F)</i>	<i>PORCENTAJES (%)</i>
Definitivamente sí	17	59
Probablemente sí	8	28
Indeciso	2	7
Probablemente no	1	3
Definitivamente no	1	3
TOTAL	29	100

GRÁFICO N° 14



Fuente : Tabla N° 14

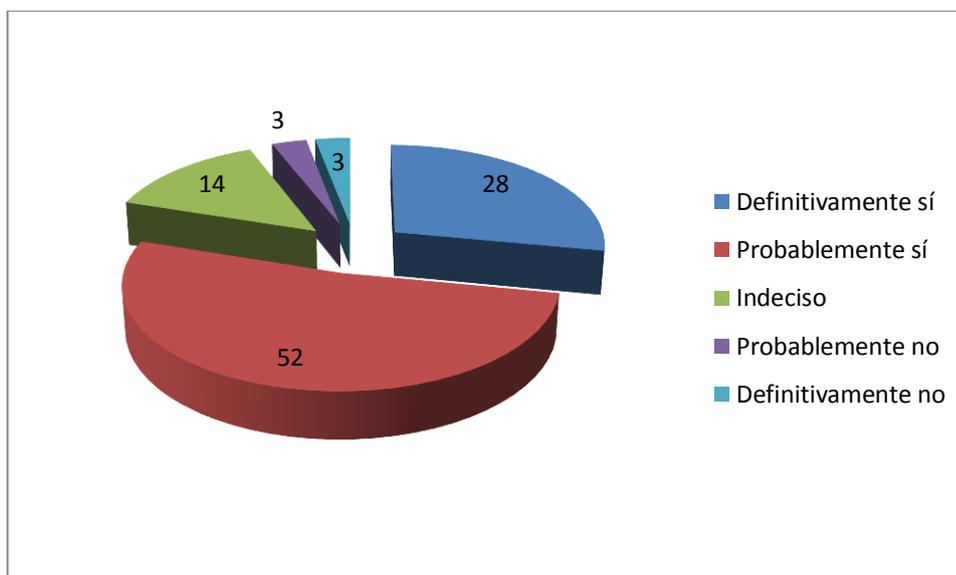
Elaboración : Ejecutor de tesis

El 59% de los estudiantes encuestados opinan definitivamente sí, ante la consulta de que las interrogantes planteadas por el docente en el desarrollo de las sesiones de clase, influían directamente en el aprendizaje de dicho curso, 28% opinan probablemente sí, que en conjunto constituyen un 87% de opinión favorable; mientras que, sin considerar a los indecisos un 6% opinan desfavorablemente.

Tabla N° 15.- PARTICIPACIÓN ACTIVA DEL DOCENTE Y ESTUDIANTE.

<i>INDICADOR</i>	<i>FRECUENCIA(F)</i>	<i>PORCENTAJES (%)</i>
Definitivamente sí	8	28
Probablemente sí	15	52
Indeciso	4	14
Probablemente no	1	3
Definitivamente no	1	3
TOTAL	29	100

GRÁFICO N°15



Fuente : Tabla N° 15

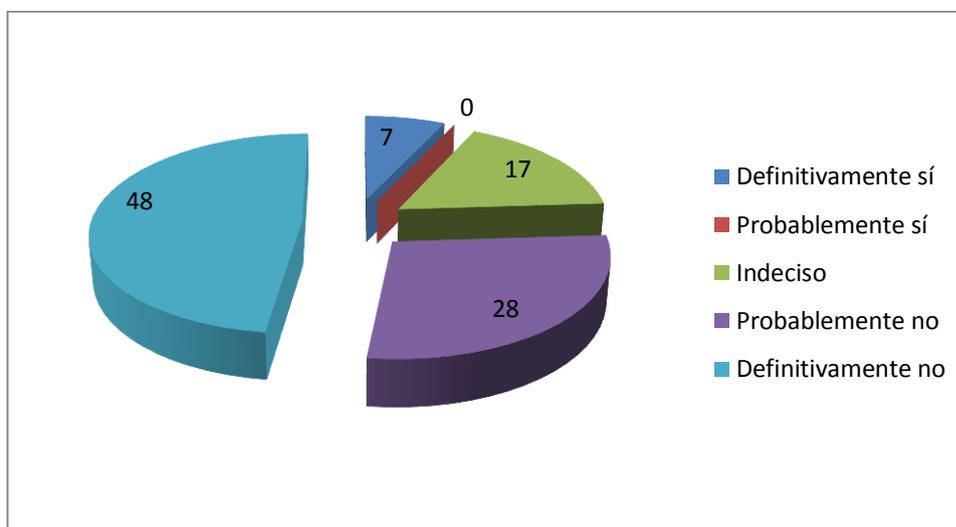
Elaboración : Ejecutor de tesis

Respecto a que en el desarrollo de las sesiones de clases se tuvo la participación activa tanto del docente como del estudiante, 28% manifestaron que definitivamente sí y si a esto le adicionamos el 52% que declaran probablemente sí; se tendría un 80% de opinión favorable, mientras sin contar a los indecisos se tendría solamente un 6% de opinión desfavorable.

Tabla N° 16.- UTILIZACIÓN DEL MÉTODO EXPOSITIVO SIN PARTICIPACIÓN DE LOS ESTUDIANTES.

<i>INDICADOR</i>	<i>FRECUENCIA(F)</i>	<i>PORCENTAJES (%)</i>
Definitivamente sí	2	7
Probablemente sí	0	0
Indeciso	5	17
Probablemente no	8	28
Definitivamente no	14	48
TOTAL	29	100

GRÁFICO N° 16



Fuente : Tabla N° 16

Elaboración : Ejecutor de tesis

Se preguntó si el docente durante el desarrollo de las sesiones de clase, ha utilizado frecuentemente el método expositivo, sin permitir la participación de los estudiantes, adicionando los que respondieron definitivamente sí y los probablemente sí, solamente se tendría un 7% de opinión desfavorable; mientras que si adicionamos los probablemente no y los definitivamente no, un 76% opinión favorable; es decir el docente en todo momento de dejar de utilizar el método expositivo más bien ha permitido la participación activa de los estudiantes.

5. DISCUSIÓN DE RESULTADOS:

La información resultante de aplicación de pre-test y post-test en grupo experimental, permite apreciar la eficacia que tiene la influencia del método heurístico en la enseñanza - aprendizaje de la matemática en alumnos de tercer grado de secundaria.

Para ello, a continuación analizamos los resultados obtenidos:

- ❖ En gráfico N° 1 se observa que en pre test 93% de los educandos tiene nivel malo de rendimiento académico en el área de matemática y el 7% tiene nivel regular; después de haber aplicado el método heurístico, el 65% de los educandos tienen nivel de regular de rendimiento académico en el área de matemática, en tanto que el 28% tiene nivel bueno y un 7% nivel excelente; es decir existe diferencias significativa en el rendimiento académico en el área de matemática.

a) Comparaciones del pre-test y post-test del grupo experimental.

- ❖ En el grupo experimental, en el pre test tenemos un promedio de rendimiento académico de 8,00 y en el pos test tenemos un promedio de 13,3 deducimos que el aumento de 5,3 puntos se debe a la aplicación del método heurístico. La prueba estadística "t" arroja un puntaje 13,1, igual a $p < 0.05$.
- ❖ En el pre test la desviación estándar es de 1.82 puntos y en el pos test la desviación estándar es de 1.26 puntos, significa que la desviación estándar más pequeña tiene mayor grado de uniformidad en las observaciones y homogeneidad en las notas, mientras que la desviación estándar mayor significa lo contrario.

- ❖ La varianza en el pre test es de 3,4 puntos y en el pos test es de 1,6 puntos de lo que deducimos que en el pre test por ser mayor los valores tienden a distribuirse más lejos de la media (mayor dispersión), mientras que en el pos test por ser más pequeña, tienen a concentrarse más alrededor de su media.
- ❖ El coeficiente de variación el pre test es de 22,75% y del pos test es de 12,03%, significa que la distribución del pos test por ser menor que en el pre test, es más homogénea porque hay menos dispersión.

b) Comparaciones del pre-test y post-test del Grupo de Control

- ❖ En el pre test tenemos un promedio de 8,8 y en el pos test tenemos un promedio de 8,2 notamos que el post-test ha habido una disminución, no significativa.
- ❖ En el pre test la desviación estándar es de 2,04 puntos y en el pos test la desviación estándar es de 1,7 puntos, significa que la desviación estándar más pequeña tiene mayor grado de uniformidad en las observaciones y homogeneidad en las notas, mientras que la desviación estándar mayor significa lo contrario.
- ❖ La varianza en el pre test es de 4,18 puntos y en el pos test es de 2,89 puntos de lo que deducimos que en el pre test por ser mayor los valores tienden a distribuirse más lejos de la media (mayor dispersión), mientras que en el pos test por ser más pequeña, tienen a concentrarse más alrededor de su media.
- ❖ El coeficiente de variación el pre test es de 23,2 y del pos test es de 20,73%, significa que la distribución del pos test por ser menor

que en el pre test, es más homogénea porque hay menos dispersión.

- ❖ Al comparar los promedios de pre test con el pos test del grupo experimental, se planteó la hipótesis estadística nula de que los promedios son iguales frente a la hipótesis estadística alternativa de que los dos promedios son diferentes y haciendo uso de la prueba “t” de Student con 56° de libertad y con un nivel de significación del 5%, se llegó a encontrar un valor experimental de 12,79 frente a un valor tabular de 2, lo que nos permite rechazar la hipótesis nula a favor de la hipótesis alternativa; es decir, la aplicación del método heurístico, es altamente eficaz, en la enseñanza-aprendizaje del área de matemáticas (ecuaciones) en los alumnos del tercer grado de secundaria del distrito de Cajabamba.

Los resultados se ajustan a la concepción del método heurístico que requiere ser un método activo, dialogal, cuya esencia es la interrogación (Varderas Santiago, 2000).

Las características del método heurístico aplicadas al aprendizaje del agrupo experimental fueron reconocidas por los alumnos (gráficos del 3 al 15). Veamos.

Característica	Definitivamente si %	Probablement e si %	Total %
Uso de conocimientos previos.	14	41	55
Placer por descubrir la verdad.	14	59	73
Docente mediador entre interrogantes y respuestas.	45	24	69
Curiosidad por conocer respuesta.	62	21	83
Instruirse en temas similares.	34	38	72
Diálogo permanente.	31	28	59
Interrogante del docente.	66	31	97

Interrogante previa a respuesta.	45	45	90
Atención a las interrogantes.	66	28	94
Interrogantes sencillas, claras.	28	45	73
Interrogantes de simples a complejas.	52	28	80
Interrogantes para aprendizaje.	59	28	87
Participación activa del docente.	28	52	80
Media Aritmética.	41.8	36	$\bar{x} = 77,8$

Situación que se ajustan a las características del método heurístico (ver páginas 21 y 22 del presente trabajo). Resumiendo se parte del objeto por aprender, se formulan interrogantes, se establece la interacción profesor-alumno, se apoya estas respuestas en conocimientos existentes, se formulan interpretaciones y se hace la valoración del conocimiento (Gálvez Vásquez, p.285_s).

6. CONCLUSIONES.

- La aplicación del método heurístico incrementa el rendimiento académico en el área de matemática, de los alumnos del grupo experimental mostrados a través de los promedios obtenidos en el pretest ($\bar{x} = 8$) y posttest ($\bar{x} = 13,3$) de los estudiantes de la institución educativa “José sabogal Diéguez” del distrito de Cajabamba, obteniéndose un $T_{c=}$ 12,79 mayor al $T_{t=}$ 2, siendo $\alpha = 0,05$.
- La diferencia significativa que existe, entre promedio obtenido en el posttest ($\bar{x} = 13,3$) del grupo experimental con el promedio obtenido en el posttest ($\bar{x} = 8,2$) del grupo de control, obteniendo un $T_{c=}$ 13,1 mayor al $T_{t=}$ 2, siendo $\alpha = 0,05$, esto demuestra que el método heurístico incrementa el rendimiento académico de los estudiantes de la institución educativa “José Sabogal Diéguez” del distrito de Cajabamba. Por lo que la hipótesis queda verificada.
- La aplicación del método heurístico, ha incrementado significativamente el rendimiento académico en el área de matemática, en los estudiantes de la institución educativa “José Sabogal Diéguez”.
- Considerando los resultados obtenidos en la encuesta realizada a los estudiantes del grupo experimental sobre si en las sesiones de clase se cumplió con las características del método heurístico, se concluye que existe una opinión favorable de un 55% acerca de la utilización de sus conocimientos previos, un 73% acerca de sentir un placer de descubrir la verdad, un 69% sobre la mediación del docente ante las interrogantes y respuestas, un 83 % sobre la curiosidad de conocer la verdad, 72% acerca de la posibilidad de instruirse en temas similares por cuenta propia, un 59% Sobre el diálogo permanente en las sesiones de clase, un 97% sobre las interrogantes fueron planteadas por el docente y las respuestas fueron dadas por los estudiantes, un 90% acerca de que para cada

respuesta hubo una interrogante previa, un 94% acerca de que si las interrogantes llamaron su atención, un 73% sobre si las interrogantes fueron sencillas entendibles y claras, un 80% de interrogantes de las simples a las complejas, un 87% sobre las interrogantes para el aprendizaje, un 80% sobre la participación activa del docente y estudiante.

7. RECOMENDACIONES

- La realización de nuevas investigaciones acerca de la aplicación del método heurístico como estrategia para mejorar el rendimiento académico de los estudiantes, para confirmar su eficacia.

- Impulsar acciones tendientes a emplear el método heurístico en la enseñanza-aprendizaje de todas las competencias y capacidades del área de matemáticas del nivel secundario.

- Difundir a las UGEL de la región, este método didáctico, para que valoren sus bondades y pueda ser recomendado como estrategia de enseñanza-aprendizaje.

- Recomendar a los colegas de matemática, de la provincia de Cajabamba la realización de experiencias de enseñanza-aprendizaje aplicando el método heurístico, para confirmar su eficacia en sus instituciones educativas.

8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALVES DE MATTOS, L. (1972). *Compendio de Didáctica General*. Buenos Aires: Kapelusz.
- AUSUBEL, D; NOVAK. (1983). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas S.A.
- CALERO PÉREZ, M. (1997). *Constructivismo un reto de Innovación Pedagógica*. Lima. Perú: San marcos.
- CAPELA, RIERA, J. (1989). *Educación un Enfoque Integral*. Lima: Cultura y Desarrollo.
- CRUZ, G (2010) *Propuesta pedagógica para el Área de Matemática del Nivel Primario*. Programa Construyendo Escuelas Exitosas-IPAE – EDYGE. Plan PIENSO
- D'AMORE, B. (2006). *Didáctica de la matemática*. Bogotá: cooperativa: Magisterio, Universidad de Bologna.
- DAR. (1996). *Relación de la Autoestima y el Rendimiento Académico en los alumnos del Primer Año de Licenciatura de Educación Secundaria de la facultad de Educación*. Trujillo.
- DÍAZ ABANTO, M. (2007). *Orientaciones para el Trabajo Pedagógico de Matemática*. Lima, Perú: Programa de Mejoramiento de la calidad de la Educación Secundaria.
- GAGÑE, R.(1982). *Como se realiza el Aprendizaje*. Brasil: Libros Teóricos y Científicos.
- GÁLVEZ VÁSQUEZ J.(2003) *Métodos y Técnicas de aprendizaje* (4^a edic).Cajamarca: Universid.Uu,C
- GARCIA, E. y RODRIGUEZ, H. (1998). *El maestro y los métodos de enseñanza*. México: Trillas.
- GUTIERREZ MERCEDES, V. (2003). *Didáctica de la Matemática*. Tomo I. Lima: Omega S.A.

- LABNOWICKS.(1988). *Introducción a Piaget, Pensamiento-Enseñanza-Aprendizaje*. USA: Addison-Wesley-Iberoamericana.
- MALASPINA JURADO, U. (1998). *Matemática su enseñanza y aprendizaje en el siglo XXI*. Revista de ciencias de la Universidad Católica del Perú.
- MANCERA MARTÍNEZ, E. (2000). *Saber Matemáticas es Saber Resolver Problemas*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.
- MIGUEL DE GUZMÁN. (1993). *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática*. Madrid, España: Ediciones Pirámide.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN. (2006). *Guía para el desarrollo del pensamiento a través de la Matemática*. Lima: Fimart S.A.C.
- MONTOYA ANGHELA, M.(2002). *El razonamiento matemático abstracto en el aprendizaje de la matemática en el primer año de Educación secundaria*.
- NÉRECI, I.G,(1969) *Hacia una didáctica general dinámica*. Buenos Aires: Kapelusz.
- NUÑEZ, M. (1995). *La Enseñanza de las Matemáticas en el Aula*. Madrid: CEAC.
- OZEJO VALENCIA, T. 2000. *Lógico Matemática 6*. MED. Lima: El Comercio S.A.
- POYLA, G. 1990. *Como plantear y resolver problemas*. México: Trillas, (decimosexta reimpresión).
- RAMIREZ ANANÁ, J. S.(2000).*Programa de Ejercitación de Habilidades Lógico-Matemática y su Influencia en el Rendimiento Escolar en la Asignatura de matemáticas en Alumnos del Primer Grado de Educación Secundaria*. Trujillo.
- RUIZ GONZÁLES, C. F. (2002). *Programa de Razonamiento matemático para mejorar el razonamiento escolar en el área*

Lógico Matemática en alumnos de segundo grado de Educación primaria. Trujillo.

- SALAZAR BONDY, A. 1967. *Breve vocabulario filosófico.* Lima: Universo.
- SANTOS, L. M. (1992) Resolución de problemas: el trabajo de Alan Schoenfeld. Una propuesta a considerar en el aprendizaje de las matemáticas. *Educación matemática*, (vol. 4, (2), 16-24). Grupo Editorial Iberoamericana.
- SIERRA BRAVO, R. (2001). *Técnicas de Investigación Social.* Madrid. (14ª Edición). Madrid: Paraninfo.
- STEEN, L. A. (1998). *La enseñanza agradable de la Matemática.* México, D. F.:MSEB/Limusa.
- THE NACIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. (1974). *Sugerencias para Resolver Problemas.* México: Trillas.
- UGARRIZA CHÁVEZ, N. (2001). *Instrumentos para la investigación educativa* .Lima: UNMSM. Facultad de Educación.
- VALIENTE VARDERAS, S. (2000). *Didáctica de la matemática.* España: La Muralla S.A.
- VEGA VILLANUEVA, F. (1975). *Matemática Moderna 1º.* Primer Año de Secundaria. Lima: Colegio Militar Leoncio Prado.
- ZEVALLOS, O. (1987). *Como Plantear Problemas.* Lima. Perú: Centauro Editores S.A.
- GODINO, J.(2003) *Didáctica de las matemáticas para Maestros.* Disponible en http://www.ugr.es/~jgodino/edumatmaestros/manual/9_didactica_maestros.pdf, recuperado el 25 de Mayo del 2013.

- STEEN, L. A. (1990), Alfabetización Matemática. Stolaf. Daeldalus, 119, (2), 211-231, disponible en <http://www.stolaf.edu/people/steen/papers/numeracy.html>, recuperado el 30 de Junio del 2013

ANEXOS

ANEXO A:
PRETEST DE TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

APELLIDOS Y NOMBRES:.....

GRADO : TERCERO SECCIÓN:.....

CALIFICATIVO:.....

INSTRUCCIONES: La prueba consta de 20 ítems de alternativa múltiple, marque con una X la alternativa correcta, gracias.

1.- Hallar el conjunto solución de: $3(x - 2) = 18$

- a) -6 b) -5 c) 8 d) 10 e) 6

2.- Hallar el conjunto solución de $3(2x - 11) = 5x - 3$

- a) 30 b) 25 c) 15 d) -9 e) 5

3.- Resolver el siguiente sistema por el método de reducción: $\begin{cases} x + 2y = 13 \\ 3x - y = 11 \end{cases}$

- a) $\{(-5;4)\}$ b) $\{(5;4)\}$ c) $\{(3;4)\}$ d) $\{(5,-7)\}$ e) $\{(6;-2)\}$

4.- Resolver el siguiente sistema por el método de eliminación: $\begin{cases} 5x + y = 1 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$

- a) $\{(6;-2)\}$ b) $\{(-3;16)\}$ c) $\{(4;-2)\}$ d) $\{(12;-2)\}$ e) $\{(1;-2)\}$

5.- ¿Cuál es el número que aumentado en 11 es 21?

- a) 5 b) 10 c) -8 d) 6 e) -5

6.- El dinero de Manuel aumentado en S/.500 es S/. 2500, ¿Cuánto tiene?

- a) 2000 b) 1500 c) 3000 d) 700 e) 800

7.- El triple de la edad de Víctor disminuido en 4 años es 35. ¿Qué edad tiene?

- a) $\{12\}$ b) $\{25\}$ c) $\{40\}$ d) $\{13\}$ e) $\{30\}$

8.- Al resolver la Ecuación $3X + 5 = 11$

Se sigue la siguiente solución:

AFIRMACIONES	RAZONES
$3X + 5 = 5 + 6$ $3X = 6$ $3 \cdot X = 3 \times 2$ $X = 2$ $\therefore C.S = \{2\}$	Descomposición del número 11 Propiedad cancelativa de la adición Factorizando Propiedad cancelativa de la multiplicación

De esta solución se deduce que:

- a) Las razones son verdaderas
- b) Las razones son falsas
- c) Las afirmaciones son insuficientes
- d) El conjunto solución es falso

9.- Una señora desea repartir caramelos entre sus hijos; si les da 8 a cada uno de ellos le sobran 24 caramelos; si les da 10 le sobran 14 solamente. ¿Cuántos caramelos y cuántos hijos tenía?

- a) 64 caramelos y 5 hijos
- b) 60 caramelos y 10 hijos
- c) 90 caramelos y 12 hijos
- d) 65 caramelos y 15 hijos

10.- Las edades de María y Teresa suman 25 años. Si hace 5 años la edad de Teresa era la mitad de la de María. ¿Cuál es la edad actual de cada una?

- a) 15 y 5
- b) 13 y 12
- c) 14 y 11
- d) 20 y 5
- e) 15 y 10

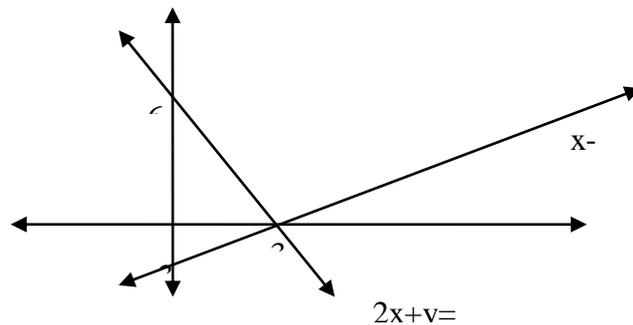
11.- Un comerciante vendió 24 lapiceros, algunos a s/. 5 cada uno, y el resto a s/. 7 cada uno. Si por la venta de los 24 lapiceros recibió s/. 132. ¿cuántos vendió de cada clase?

- a) Vendió 18 lapiceros de s/. 5 cada uno y 6 lapiceros de s/. 7.
- b) Vendió 15 lapiceros de s/. 4 cada uno y 9 lapiceros d

e s/. 6.

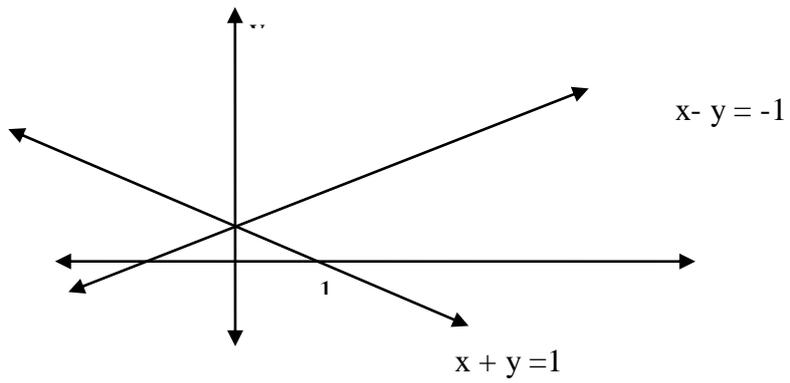
- c) Vendió 12 lapiceros de s/. 3 cada uno y 12 lapiceros de s/. 7.
- d) Vendió 18 lapiceros de s/. 6 cada uno y 13 lapiceros de s/. 5

12.- Obtén el conjunto solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales, cuya gráfica es:



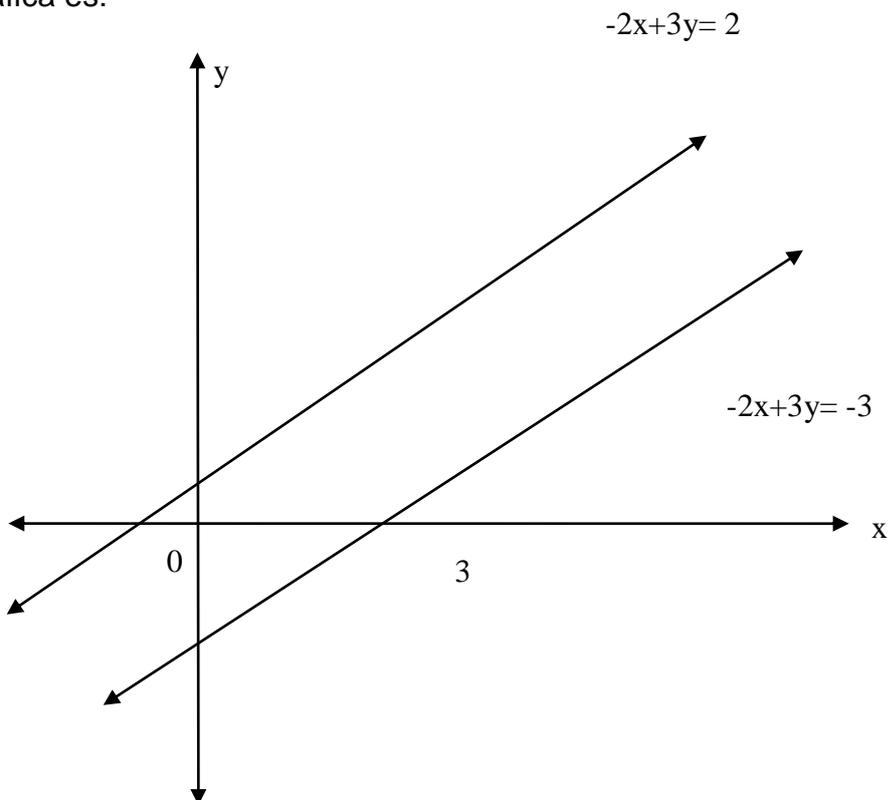
- a) $\{(0;-3)\}$
- b) $\{(0;1)\}$
- c) $\{(3;0)\}$
- d) $\{(3;1)\}$
- e) $\{(0;5)\}$

13.- Obtén el conjunto solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales, cuya gráfica es



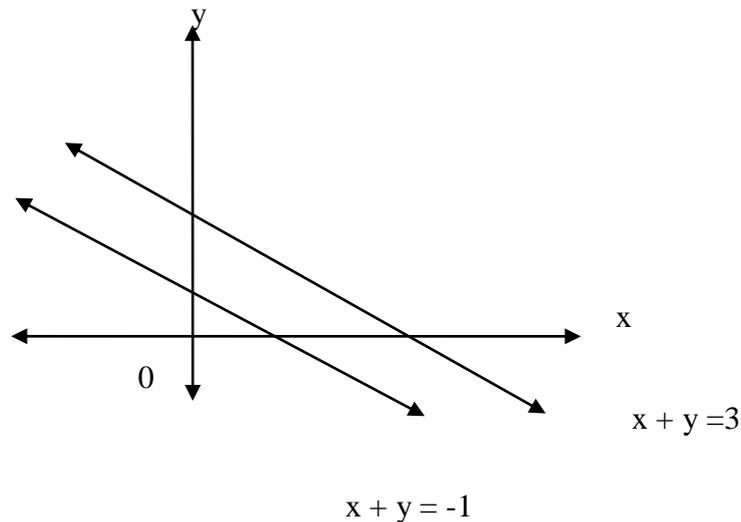
- a) $\{(0;1)\}$ b) $\{(0;-3)\}$ c) $\{(0;4)\}$ d) $\{(0;1)\}$ e) $\{(3;1)\}$

14.- Obtén el conjunto solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales, cuya gráfica es:



- a) $\{\}$ b) $\{(0;-3)\}$ c) $\{(0;1)\}$ d) $\{(3;1)\}$ e) $\{(0;5)\}$

15.- Obtén el conjunto solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales, cuya gráfica es:



- a) $\{(0;-3)\}$ b) No tiene solución c) $\{(0;4)\}$ d) $\{(3;1)\}$ e) Infinitas soluciones

16.- Determina el valor de "k" para que el sistema sea compatible indeterminado.

$$\begin{cases} 2x + 3y = -5 \\ 6x + 9y = 5k \end{cases}$$

- a) $k = -2$ b) $k = -3$ c) $k = -4$ d) $k = 3$ e) N.A.

17.- Determina qué valor debe tomar "k" para que el sistema sea incompatible.

$$\begin{cases} (3-k)x + 5y = 4 \\ (k-2)x + 2y = 6 \end{cases}$$

- a) $k = \frac{12}{7}$ b) $k = \frac{16}{7}$ c) $k = -4$ d) $k = 8$ e) $k = 0$

18.- Hallar el conjunto solución del sistema por determinantes.

$$\begin{cases} x - y = 11 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

- a) $\{-8,-12\}$ b) $\{8-3\}$ c) $\{-3,8\}$ d) $\{8,-6\}$ e) N.A

19.- Al resolver el sistema por determinantes obtenemos:

$$\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{6} = -4 \\ \frac{x}{8} - \frac{y}{12} = 0 \end{cases}$$

- a) $\{-8, -10\}$ b) $\{-6, -8\}$ c) $\{-8, -12\}$ d) $\{8, 12\}$ e) N.A.

20.- Al resolver el sistema por la regla de Cramer $\begin{cases} 15x + 10y = -12 \\ 15x - 10y = 8 \end{cases}$ resulta:

- a) $\left\{\frac{-2}{15}, -1\right\}$ b) $\left\{\frac{5}{12}, -6\right\}$ c) $\{4, 7\}$ d) $\{12, -7\}$ e) N.A.

ANEXO B

POSTTEST DE TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

INSTITUCIÓN EDUCATIVA:.....

APELLIDOS Y NOMBRES:.....

GRADO : TERCERO SECCIÓN:.....

CALIFICATIVO:.....

INSTRUCCIONES:

Este examen está compuesto de 20 ítems, los cuales deben ser desarrollados con bastante tranquilidad. Te recomendamos revisar todas las preguntas y dejar las de mayor dificultad para el final. Una vez resuelta cada pregunta, elige la alternativa que consideres correcta y márcala en la hoja de respuestas

1.- Hallar el conjunto solución de: $\frac{x}{\sqrt{5} - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{x}{\sqrt{5} + \frac{1}{2}}$

- a) $3\frac{\sqrt{5}}{20}$ b) -1 c) 0 d) $4\sqrt{5}$ e) $19\frac{\sqrt{5}}{20}$

2.- Hallar el conjunto solución de: $\sqrt{2}x + \sqrt{6} = \sqrt{8}$

- a) $3\frac{\sqrt{5}}{20}$ b) 6 c) $2 - \sqrt{3}$ d) $7\sqrt{5}$ e) $11\frac{\sqrt{5}}{20}$

3.- Hallar los menores valores fraccionarios del siguiente sistema:

$$\begin{cases} (5-x)(2-y) = -11 \\ xy = -2 \end{cases}$$

- a) $-1/2$ y $-2/3$ b) $-1/2$ y $-1/5$ c) $-2/5$ y $-5/7$
 d) $-5/9$ y $-4/3$ e) Ninguna de las anteriores.

4.- Dar el valor de $x+y$, al resolver el sistema en x e y :

$$\begin{cases} 3x - m - 5n = 2y \\ 2x + m = 5n + 3y \end{cases}$$

- a) m b) $2n$ c) $3m$ d) $2m$ e) 4

5.- Del siguiente Esquema

	Teófilo	Raúl
Edad Actual	$a+b$	$a-b$
Edad dentro de 10 años	$2a+1$	$3b+1$

Calcular $a+b$.

- a) 19 b) 23 c) 21 d) 24 e) 26

6.- Los $\frac{5}{8}$ de la suma de dos números es 15 y los $\frac{7}{2}$ de su diferencia es igual a 7. Hallar el producto de ambos números.

- a) 13 y 11 b) 13 y 12 c) 15 y 16 d) 14 y 15 e) 16 y 17

7.- La tercera parte de la edad de Juan excede a la quinta parte de la edad de Pedro en 2; además dentro de 4 años la relación de ambas edades será de 8 a 7. ¿Cuál es la edad de Juan?

- a) 10 b) 11 c) 12 d) 13 e) N.A.

8.- Juan le dice a Gabriel: "la relación de nuestras edades hace 3 años era de 3 a 2 y dentro de 13 años será de 7 a 6". ¿Cuál es la suma de las edades actuales?

- a) 20 b) 30 c) 18 d) 26 e) 19

9.- Si la relación: $ax+by+cz= d$, está sujeta a la tabla de valores:

a	b	c	d
1	1	0	7
1	0	1	8
0	1	1	9

Calcule: $2x+3y-5z$

- a) 7 b) -7 c) 2 d) -2 e) 6

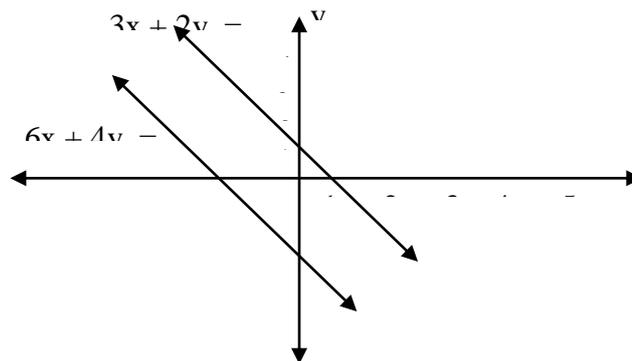
10.- Dentro de 65 años tendré 6 veces la edad que tenía hace 10 años. Cuántos años me faltan para cumplir 49 años?

- a) 25 b) 24 c) ya los cumplí d) 15 e) 6

11.- Los $\frac{5}{8}$ de la suma de dos números es 15 y los $\frac{7}{2}$ de su diferencia es igual a 7. Hallar el producto de ambos números.

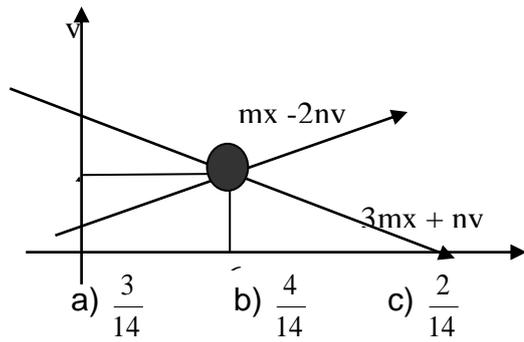
- a) 13 y 11 b) 13 y 12 c) 15 y 16 d) 14 y 15 e) 16 y 17

12.- La solución del sistema de ecuaciones de la gráfica es:



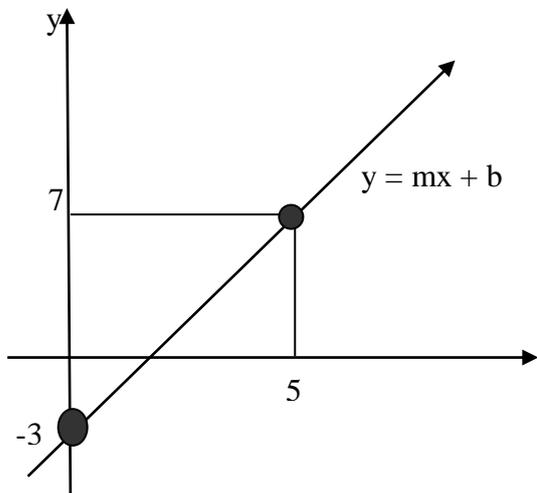
- a) $\{(2,3)\}$ b) $\{(-1,-2)\}$ c) $\{-3,-2\}$ d) no tiene solución e) $(-1;2)$

13.- En el siguiente gráfico, calcular m.



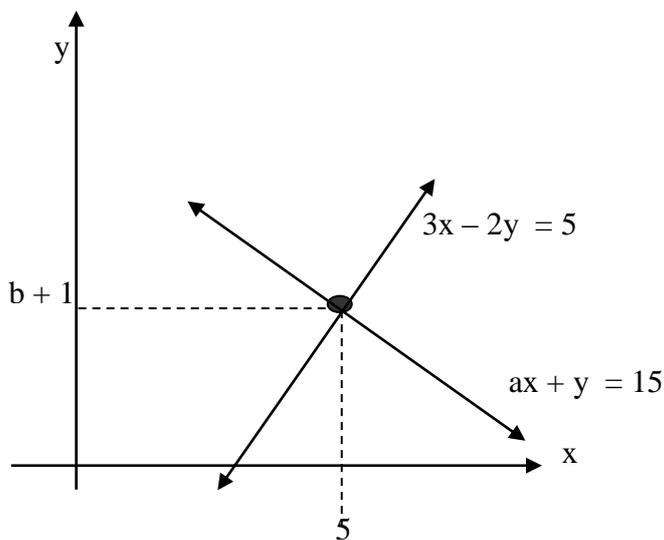
- a) $\frac{3}{14}$ b) $\frac{4}{14}$ c) $\frac{2}{14}$ d) 6 d) -6 e) -8

14.-En el siguiente gráfico, hallar "m"



- a) -1 b) 3 c) -2 d) 2 e) 1

15.- En el siguiente gráfico hallar, a+b.



- a) 4 b) 6 c) 12 d) 15 e) 8

16.- Hallar "n" para que el siguiente sistema de ecuaciones sea incompatible.

$$\begin{cases} \frac{2n}{x} = \frac{12-5y}{x^2} \\ 7nx - 6 = 2y + x \end{cases}$$

- a) $\frac{6}{7}$ b) $\frac{3}{7}$ c) $\frac{5}{39}$ d) -3 e) -1

17.- ¿Para qué valor de "m" el sistema mostrado a continuación:

$$\begin{cases} mx + (m-2)y = 6 \\ (m+3)x + my = 12 \end{cases}$$

es compatible determinado?

- a) Para m=6 solamente b) Para todo valor
 c) Para cualquier valor diferente de 6. d) Para todo valor mayor que 6
 e) Para todo valor menor que 6.

18.- Resolver el sistema por determinantes.

$$\begin{cases} 4(2x + y) + 5(2x - y) = 17 \\ 3(2x + y) - (2x - y) = 8 \end{cases}$$

Indicar luego el valor de $x^2 - y^2$

- a) 2 b) 1 c) 0 d) 3 e) 9

19.- Resolver el sistema por determinantes $\begin{cases} \frac{12}{x} + \frac{13}{y} = 63 \\ \frac{11}{x} + \frac{12}{y} = 58 \end{cases}$ e

indicar x.y

- a) 6 b) 1/6 c) 1/12 d) 1/8 e) 1/16

20.- Resolver por la Regla de Cramer. $\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = 2 \\ \sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 0 \end{cases}$

- a) (-4; 4) b) (6;-2) c) $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$ d) $(\sqrt{3}; -\sqrt{3})$ e) (-1; 5)

ANEXO C

ENCUESTA PARA ESTUDIANTES DEL 3º GRADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA “JOSÉ SABOGAL DIÉGUEZ” DEL CASERÍO DE PARUBAMBA.

INSTRUCCIONES: La presente es una encuesta con fines de investigación, mucho agradeceré a Usted alumno, marcar sus respuestas con una X en el recuadro respectivo. La información que proporcione es totalmente anónima.

PREGUNTAS DE LA ENCUESTA

A) DE LAS CARACTERÍSTICAS DEL MÉTODO HEURÍSTICO.

I. INSTRUCCIÓN.

1.1. En todo momento del desarrollo del Área de Matemáticas, el profesor ha utilizado los conocimientos previos que Usted tiene con respecto al tema de clase.

- | | |
|--------------------|--------------------------|
| Definitivamente sí | <input type="checkbox"/> |
| Probablemente sí | <input type="checkbox"/> |
| Indeciso | <input type="checkbox"/> |
| Probablemente no | <input type="checkbox"/> |
| Definitivamente no | <input type="checkbox"/> |

1.2. En cada una de las interrogantes planteadas por el profesor al desarrollar el tema de clase ha sentido Ud. placer inefable de descubrir la verdad con el establecimiento de la respuesta a tal interrogante.

- | | |
|--------------------|--------------------------|
| Definitivamente sí | <input type="checkbox"/> |
| Probablemente sí | <input type="checkbox"/> |
| Indeciso | <input type="checkbox"/> |
| Probablemente no | <input type="checkbox"/> |
| Definitivamente no | <input type="checkbox"/> |

1.3. En el establecimiento de las preguntas, al solicitar las respuestas al profesor se ha comportado como un mediador neutral para todos los estudiantes.

- Definitivamente sí
- Probablemente sí
- Indeciso
- Probablemente no
- Definitivamente no

1.4. En cada una de las interrogantes formuladas por el profesor en el desarrollo de las clases, sentía Ud. la curiosidad de conocer la respuesta correcta.

- Definitivamente sí
- Probablemente sí
- Indeciso
- Probablemente no
- Definitivamente no

1.5. Al finalizar una sesión de clases experimento usted la posibilidad de instruirse en temas similares por su propia cuenta.

- Definitivamente sí
- Probablemente sí
- Indeciso
- Probablemente no
- Definitivamente no

II. DIÁLOGO

2.1- En las clases desarrolladas por el profesor considera usted que se ha utilizado el diálogo permanente.

- | | |
|--------------------|--------------------------|
| Definitivamente sí | <input type="checkbox"/> |
| Probablemente sí | <input type="checkbox"/> |
| Indeciso | <input type="checkbox"/> |
| Probablemente no | <input type="checkbox"/> |
| Definitivamente no | <input type="checkbox"/> |

2.2. El diálogo establecido en las clases desarrolladas fue con la utilización de interrogantes por parte del profesor y las respuestas por parte de los estudiantes.

- | | |
|--------------------|--------------------------|
| Definitivamente sí | <input type="checkbox"/> |
| Probablemente sí | <input type="checkbox"/> |
| Indeciso | <input type="checkbox"/> |
| Probablemente no | <input type="checkbox"/> |
| Definitivamente no | <input type="checkbox"/> |

III. INTERROGACIÓN.

3.1. Para cada respuesta que usted ha formulado existió previamente una interrogante planteada por el profesor.

- | | |
|--------------------|--------------------------|
| Definitivamente sí | <input type="checkbox"/> |
| Probablemente sí | <input type="checkbox"/> |
| Indeciso | <input type="checkbox"/> |
| Probablemente no | <input type="checkbox"/> |
| Definitivamente no | <input type="checkbox"/> |

3.2. Las interrogantes planteadas por el profesor al inicio de las clases han llamado su atención sobre el tema desarrollado.

- Definitivamente sí
- Probablemente sí
- Indeciso
- Probablemente no
- Definitivamente no

3.3. Las interrogantes planteadas por el profesor en desarrollo de las clases han sido sencillas, entendibles, claras correctas y breves.

- Definitivamente sí
- Probablemente sí
- Indeciso
- Probablemente no
- Definitivamente no

3.4. Las interrogantes planteadas han obedecido a una secuencia del desarrollo de las clases y desde las más sencillas a las más complejas.

- Definitivamente sí
- Probablemente sí
- Indeciso
- Probablemente no
- Definitivamente no

3.5. El número de preguntas planteadas por el profesor en el desarrollo de las clases han sido lo suficientemente recomendable para el entendimiento y aprendizaje del tema.

- Definitivamente sí
- Probablemente sí
- Indeciso

Probablemente no

Definitivamente no

IV . MÉTODO ACTIVO

4.1. En las clases desarrolladas ha notado Ud. la participación activa del Docente y del estudiante.

Definitivamente sí

Probablemente sí

Indeciso

Probablemente no

Definitivamente no

4.2. En desarrollo de las clases ha notado usted sí en algún momento el docente ha utilizado la exposición o no ha permitido la participación de los estudiantes.

Definitivamente sí

Probablemente sí

Indeciso

Probablemente no

Definitivamente no

ANEXO D

UNIVERSIDAD PRIVADA ANTONIO ORREGO

ESCUELA DE POST GRADO

SECCIÓN DE DOCTORADO EN EDUCACIÓN



**PROGRAMA DE APLICACIÓN DE LA INFLUENCIA DEL
MÉTODO HEURÍSTICO PARA LA ENSEÑANZA-
APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN ALUMNOS DEL
TERCER GRADO DE SECUNDARIA DEL DISTRITO DE
CAJABAMBA**

TESISTA: NEMECIO MANUEL MEDINA ALIAGA

ASESOR: Dr. Lorenzo E. Matos Deza

2013

“Enseñar exige respeto a los saberes de los educandos”.
Enseñar exige respeto a la autonomía del ser del educando”.
Enseñar exige seguridad, capacidad profesional y generosidad.
“Enseñar exige saber escuchar”.

Paulo Freire.

PLANES DE CLASE

Los planes de clases 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,9 y 10 han estado dirigidos al:

GRUPO EXPERIMENTAL

GRADO: Tercer Grado de la Institución Educativa “José sabogal Diéguez” del Distrito de Cajabamba.

ÁREA: Matemática.

CONTENIDO: Ecuaciones de primer grado y sistemas de ecuaciones con dos y tres variables.

PREGUNTAS: Se ha considerado las siguientes preguntas teniendo un orden en la ejecución de las mismas.

- **Preguntas de Exploración.**- Mediante un diálogo con preguntas planteadas por el docente y las respuestas por los estudiantes, se recuerdan los conceptos que se utilizarán en el desarrollo de la clase correspondiente.
- **Preguntas de Presentación.**- Se presenta alguna o todas las experiencias con manipulación de objetos, **de conocimientos**, de realidades; etc. Con el fin de crear una idea en el tema que debe desarrollarse en clase.
- **Preguntas de asimilación.**-Se realizan demostraciones de propiedades, se resuelven ejercicios relacionados con el tema de clases.
- **Preguntas de Organización.**- Se interpreta los resultados, se enuncian las propiedades desarrolladas en clase.
- **Preguntas de aplicación.**- Se presentan ejercicios y problemas diversos en los que se apliquen los conocimientos adquiridos en la sesión de clases.

PLAN DE CLASE N° 1

TEMA: Ecuaciones

OBJETIVO: Establecer los conceptos de ecuación y aplicar las propiedades de los números para resolver una ecuación de primer grado.

a) PREGUNTAS DE EXPLORACIÓN

Docente.- ¿Que es una identidad matemática?

Estudiante.- Una identidad es la constatación de que dos objetos que matemáticamente se escriben diferente, son de hecho el mismo objeto. En particular, una identidad es una igualdad entre dos expresiones que es cierta sean cuales sean los valores de las distintas variables empleadas.

Docente.- ¿Qué identidades conoces?

Estudiante.-

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$
$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Docente.- ¿Qué entiendes por igualdad?

Estudiante.- Una igualdad o equivalencia es la relación que existe entre dos expresiones diferentes de una misma cantidad. Así, por ejemplo, serían igualdades $7 = 6 + 1$ o bien $2x = x + 3$.

Docente.- ¿Qué entiendes por variable?

Estudiante: Es un símbolo, generalmente una letra, que se emplea para designar uno cualquiera de los elementos de un conjunto dado.

Docente.- ¿Qué entiendes por constante?

Estudiante.- Es un símbolo que representa el elemento de un conjunto unitario.

Docente.- ¿Qué es una ecuación de primer grado en una variable?

Estudiante.- Una ecuación de primer grado en una variable es un enunciado de la forma $ax + b = c$, donde a, b y c son números reales y x es una variable cuyo universo o dominio es el conjunto de los números reales.

Docente.- ¿En qué ciencias se usan las ecuaciones?

Estudiante. Las ecuaciones se usan en la física, química, la ingeniería, la meteorología, la medicina, etc.

b) PREGUNTAS DE PRESENTACIÓN

Docente.- ¿Qué observas en las siguientes expresiones: $x + 3 = 7$; $2x + 1 = 5$;

$$6 = y + 2y; \quad 3x + 2 = x + 6 ?$$

Estudiante.- Que en cada una de ellas figura una sola variable.

En ninguna de ellas la variable figura como divisor, razón por la cual se llaman enteras.

En todas ellas el exponente de la variable es 1, por lo que reciben el nombre de ecuaciones de primer grado.

c) PREGUNTAS DE ASIMILACION

Docente ¿Cómo resolver la ecuación?

$$7 - 3x = 1$$

Estudiante.-Primero aplicamos la propiedad de sustracción de números naturales, y nos da la ecuación equivalente: $3x + 1 = 7$.

Aplicamos la propiedad de monotonía de la sustracción, restando 1 a cada miembro para obtener la ecuación equivalente:

$$3x + 1 - 1 = 7 - 1$$

En seguida aplico la propiedad asociativa de la adición en el primer miembro, y simplificando el segundo, se obtiene la ecuación

$$\text{equivalente: } 3x + (1 - 1) = 6$$

$$\text{Pero } 1-1=0 \text{ entonces: } 3x + (0) = 6$$

Y como $3x+0=3x$, por la propiedad del elemento neutro para adición, resulta la ecuación equivalente: $3x=6$ Escriba aquí la ecuación.

$$\text{Factorizando ambos miembros resulta: } 3 \cdot x = 3 \cdot 2$$

Luego aplicamos la propiedad cancelaria de la multiplicación, se obtiene:

$$x = 2$$

d) PREGUNTAS DE ORGANIZACIÓN

Docente.- ¿Cómo comprobar que $x=2$?

Estudiante.- Reemplazando el valor de "x" en la ecuación. $7 - 3x = 1$

$$7 - 3 \cdot 2 = 1$$

$$7 - 6 = 1$$

$$1 = 1$$

Como esta proposición es verdadera, entonces el conjunto solución es $\{2\}$

Docente.- ¿Cree usted que lo aprendido, debe compartir con sus demás compañeros?

Estudiante.-Si, ya que en grupo se comparten dudas y aciertos sobre lo aprendido.

d) PREGUNTAS DE APLICACIÓN

Docente.- ¿Cómo se resuelve la ecuación $5x + 2 = x - 10$, aplicando las propiedades de los números?

Estudiante: Para resolver la ecuación se utilizará las siguientes propiedades de los números.

$$5x + 2 + -2 + -x = x - 10 + -2 +$$

$-x$

$$(5x + -x) + (2 + -2) = (x + -x) + (-10 + -2)$$

$$4x + 0 = 0 + -12$$

$$4x = -12$$

$$x = -3$$

Propiedad de igualdad de la adición.

P. conmutativa y asociativa de la adición; definición de sustracción.

Reducción de términos semejantes.

P. del elemento neutro de la adición.

Propiedad de monotonía de la división exacta.

PLAN DE CLASE N° 2

TEMA : Aplicación de las Ecuaciones de primer grado en una variable, para plantear y resolver problemas sobre ecuaciones.

OBJETIVO :

Una vez finalizada la sesión de clases el alumno debe ser capaz de resolver problemas sobre ecuaciones de primer grado en una variable.

PROBLEMA.

Enrique es dos veces mayor que su hermano Santiago. Si las sumas de sus edades es igual a 36, ¿Cuántos años tiene cada uno?

a) Preguntas de Exploración:

Docente.- Jóvenes estudiantes, antes de resolver el problema plantado es necesario recordar algunos conceptos que se utilizarán en la solución del problema.

Docente.- ¿Cuál es la definición de variable?

Estudiante.- Es un símbolo, generalmente una letra, que se emplea para designar una cantidad desconocida.

Docente.- ¿Qué es una frase numérica abierta?

Estudiante.- Es toda frase numérica que contiene una o más variables.

Docente.- ¿En qué consiste el valor de una frase numérica abierta?

Estudiante.- Es el número que se obtiene al remplazar la variable por un elemento determinado de su dominio y realizar la simplificación correspondiente.

Docente.- ¿Qué es un enunciado?

Estudiante.- Un enunciado es una expresión que afirma o niega algo.

Docente.- ¿Qué es un enunciado numérico abierto?

Estudiante.- Es un enunciado numérico que contiene una o más frases numéricas abiertas.

Docente.- ¿Qué es una ecuación?

Estudiante.- Una ecuación es un enunciado numérico abierto que contiene el signo de igualdad.

Docente.- ¿Qué significa resolver una ecuación?

Estudiante.- Significa hallar su conjunto solución.

b) Preguntas de Presentación.

Docente.- ¿Podrían jóvenes alumnos detallar el esquema que ilustre el procedimiento que permita obtener la solución del problema?

Estudiante.- En la solución de un problema se deben seguir los siguientes pasos o etapas.

- ✓ Leer el problema con todo cuidado.
- ✓ Analizar el problema.
- ✓ Armado de un esquema mental.
- ✓ Ejecución del esquema mental o realización de las operaciones necesarias.
- ✓ Formulación de la respuesta.
- ✓ Verificación del mismo.

c) Preguntas de asimilación.

Docente.- ¿Podrían ustedes desarrollar más específicamente las etapas planteadas en la presentación, luego de haber comprendido el problema?

Estudiante.- vamos a proceder de la siguiente manera.

Primer Paso

Ante todo se debe leer el enunciado verbal dado con el mayor cuidado posible, a fin de estar seguro de haber entendido el significado de todos los términos usados en él.

Segundo Paso.

En la escritura de un enunciado abierto, consiste en escoger un símbolo para representar el número descrito en el enunciado; esto es, denotando con una variable. Diremos entonces: "Sea x la variable que representa al número desconocido"; o sea la edad de Santiago.

Téngase entendido que es importante señalar lo que representa la variable, sea número de soles, de años, de horas, etc.

Tercer paso.

Consiste en escribir las frases numéricas correspondientes a las frases verbales que expresan las relaciones de la variable con los datos:

Las frases para el problema propuesto son:

"La Edad de Enrique es dos veces más que la de Santiago" $2x$.

"La suma de la edad de Santiago y Enrique" $x+ 2x$.

Cuarto Paso

Consiste en escribir un enunciado abierto; esto es, una ecuación que establezca la condición del problema empleando las frases numéricas.

Se nos dijo que la suma de sus edades es igual a 36, por lo tanto la ecuación es:

$$X + 2x = 36$$

Respecto a este paso diremos que muchas veces aunque el enunciado del problema se puede investigar, que frase numérica es igual a qué otra. Para esto, lo mejor es preguntarse: ¿Qué frase numérica es igual a que otra? La respuesta a esta pregunta es la ecuación.

Quinto paso.- Resolver la ecuación.

$$X + 2x = 36$$

$$3x = 36$$

$$X = 36/3$$

$$X = 12$$

d) Preguntas de organización

Docente.- ¿El, paso que sigue en la solución del problema es?

Estudiante.- Comprobar la solución usando el enunciado del problema y no sustituyendo el valor de la variable en la ecuación, ya que ésta puede estar equivocada. La comprobación de si el valor hallado satisface todas las condiciones estipuladas en el problema es, pues, fundamental.

Docente.- En nuestro caso

Estudiante.- Así, puyes Santiago tendría 12 años y su hermano Enrique, $2x$ $12 = 24$, la suma de sus edades es 36:

$$12 + 24 = 36.$$

Docente.- Entonces ¿Cuál es la respuesta al ejercicio?

Estudiante.- La respuesta es la siguiente:

Santiago tiene 12 años y Enrique 24.

e) Preguntas de aplicación

Docente.- Se tiene el siguiente problema:

Un comerciante vendió 24 lapiceros, algunos a S/. 5 cada uno, y el resto a S/. 7 cada uno. Si por la venta de los 24 lapiceros recibió S/. 132, ¿Cuántos vendió de cada clase?

Alumno.- De acuerdo a lo establecido en el problema anterior, para solucionar este problema implica seguir la siguiente metodología:

- Comprensión del problema a resolverse.
- Identificación de los datos y las incógnitas.

Denotemos el número de lapiceros vendidos a S/. 5 por x .

Entonces:

“El número de lapiceros vendidos a S/. 7 “..... $24-x$.”

“El número de soles recibidos por la venta de los lapiceros a S/.5”..... $5x$.”

“El Número de soles recibidos por la venta de los lapiceros a S/.7” $7(24-x)$.”

- Planteamiento de la ecuación.

Se nos dijo que por la venta de los 24 lapiceros recibió S/.132; por consiguiente la ecuación es:

Lo recibido por los más lo recibido por los es igual a lapiceros vendidos lapiceros vendidos

$$\begin{array}{rcccl} \text{a S/. 5} & & \text{a S/.7} & & \\ 5x & + & 7(24 - x) & = & 132 \end{array}$$

- Resolvemos la ecuación:

$$5x + 7(24-x) = 132$$

$$5x + 168 - 7x = 132$$

$$- 2x = 132- 168$$

$$-2x = - 36$$

$$X = 18.$$

- Interpretación de los resultados obtenidos.

Resolviendo esta ecuación se obtiene $x = 18$, lo cual significa que se habían vendido 18 lapiceros a S/. 5 y 6 a S/. 7.

Valor de los 18 lapiceros = $5 \times 18 = 90$.

Valor de los 6 lapiceros = $7 \times 6 = 42$.

Valor total = $90 + 42 = 132$.

PLAN DE CLASE N° 03

TEMA: Resolución de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos variables.

OBJETIVO: Resuelve sistemas de ecuaciones de primer grado por el método algebraico de sustitución.

a) PREGUNTAS DE EXPLORACIÓN

Docente.- ¿Lo que observas a continuación que idea te trae a la mente y que crees que es?

$$\begin{cases} x + y = 1 \dots\dots\dots(1) \\ x - y = 5 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

Estudiante.- Me trae a la mente que son ecuaciones con dos variables ; además puedo decir que es un sistema de ecuaciones, ya que es un conjunto formado por dos ecuaciones.

Docente.- ¿ Qué variables tiene cada ecuación?

Estudiante.- La ecuación (1) tiene las variables x e y. y la ecuación (2) tiene las variables x, y también.

Docente.- ¿Qué es un par ordenado?

Estudiante.- Un par ordenado es un conjunto formado por dos elementos, donde existe un orden (1° lugar y le sigue un 2° lugar), ejemplo en el par ordenado (3;2), en este par el primer elemento es el número 3 y el segundo elemento es el número 2.

b) PREGUNTAS DE PRESENTACIÓN

Docente.- ¿Para qué pares de números, se cumple la ecuación número 1 del ejemplo?

Estudiante.- para los siguientes pares de números: (1; 2), (0; 1), (2;-1), (3;-2), (4;-3),...

Docente.- ¿Para qué pares de números, se cumple la ecuación número 2 del ejemplo.

Estudiante.- para los siguientes pares de números: (0;-5), (2;-3), (3;-2), (5;-0), (6;1)...

Docente.- ¿De los pares ordenados que observas, existe algún par de números, que sea común a la ecuación número 1 y número 2.

Estudiante.- Sí el par de números común es el par (3,-2).

c) PREGUNTAS DE ASIMILACIÓN

Docente.- ¿El siguiente ejemplo es un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y = 13 \dots\dots\dots(1) \\ 3x - y = 11 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

Alumno.- Sí es un sistema de ecuaciones, ya que está formado por un conjunto de ecuaciones (dos),

Docente.- ¿Cómo se puede resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de sustitución?

Estudiante.- Se despeja cualquier variable de una de las ecuaciones y se reemplaza el valor obtenido en la otra ecuación, obteniéndose una ecuación con una variable, la cual se resuelve.- El valor

obtenido se reemplaza en cualquiera de las ecuaciones y se obtiene el valor de la otra variable.

Docente.- ¿Cómo se puede despejar “x” en la primera ecuación?

Estudiante: Despejamos x de (1): $x = 13 - 2y$(3)

Docente.- ¿Se puede sustituir (3) en (2)?

Estudiante.- $3(13 - 2y) - y = 11$; luego despejamos “y”
 $Y = 4$

Docente.- ¿Se puede reemplazar el valor de y en (1)

Reemplazamos $y = 4$ en (1): $x + 2(4) = 13$

Despejamos x: $x = 5$

Docente.- ¿De los resultados obtenidos de “x” y de “y”, se deduce que el conjunto solución

Es?

Estudiante.- El conjunto solución del sistema de ecuaciones es: $\{(5; 4)\}$

d) PREGUNTAS DE ORGANIZACIÓN

Docente.- ¿Cómo comprobar que el par ordenado $\{(5; 4)\}$ es el conjunto solución?

Estudiante.- Se comprueba en las ecuaciones (1) y (2).

$$\begin{array}{ll} x + 2y = 13 & 3x - y = 11 \\ 5 + 2(4) = 13 & 3(5) - 4 = 11 \\ 5 + 8 = 13 & 15 - 4 = 11 \end{array}$$

e) PREGUNTAS DE APLICACIÓN

Docente.- Resolver el sistema de ecuaciones por el método de sustitución.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \dots\dots\dots(1) \\ 6x - 6y = -5 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

PLAN DE CLASE N° 04

TEMA: Resolución de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos variables.

OBJETIVO: Resuelve sistemas de ecuaciones de primer grado por el método algebraico de reducción.

a) PREGUNTAS DE EXPLORACIÓN

Docente.- ¿Lo que observas a continuación que idea te trae a la mente y que crees que es?

$$\begin{cases} 6x + y = 1 \dots\dots\dots(1) \\ 10x - y = 3 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

Estudiante.- Me trae a la mente que son ecuaciones con dos variables ; además puedo decir que es un sistema de ecuaciones, ya que es un conjunto formado por dos ecuaciones.

Docente.- ¿ Qué variables tiene cada ecuación?

Estudiante.- La ecuación (1) tiene las variables x e y. y la ecuación (2) tiene las variables x, y también.

Docente.- ¿La solución del sistema de ecuaciones dado será?

Estudiante.- Un par ordenado que satisfaga a las ecuaciones 1 y 2.

b) PREGUNTAS DE PRESENTACIÓN

Docente.- ¿Se pueden sumar las ecuaciones 1 y 2 del sistema?

Estudiante.- Si se pueden sumar ambas ecuaciones, también se pueden restar.

c) PREGUNTAS DE ASIMILACIÓN

Docente.- ¿Cómo se puede resolver el siguiente sistema de ecuaciones, propuesto por el método de reducción?

Estudiante.- Sumo miembro a miembro las dos ecuaciones y obtengo:

$$16x = 4,$$

$$x = \frac{4}{16}$$

$$x = \frac{1}{4}$$

Docente.- ¿Cómo se encuentra el valor de “y”?

Estudiante.- Sustituyo el valor de “x” en la primera ecuación del sistema dado y resulta:

$$6x \frac{1}{4} + y = 1$$

$$\frac{6}{4} + y = 1$$

$$6 + 4y = 4 \quad 4y = -2$$

$$y = \frac{-2}{4}$$

d) PREGUNTAS DE ORGANIZACIÓN

Docente.- ¿Cómo comprobar que el par ordenado $\left\{\left(\frac{1}{4}, \frac{-1}{2}\right)\right\}$ es el conjunto solución?

Estudiante.- Se comprueba en las ecuaciones (1) y (2).

$6x+y = 1$	$10x - y = 3$
$6\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{-1}{2} = 1$	$10\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{-1}{2} = 3$
$\frac{6}{4} - \frac{1}{2} = 1$	$\frac{10}{4} - \frac{-1}{2} = 3$
$\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$	$\frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$
$\frac{2}{2} = 1$	$\frac{6}{2} = 3$
$1 = 1$	$3 = 3$

e) PREGUNTAS DE APLICACIÓN

Docente.- Resolver el sistema de ecuaciones por el método de reducción.

$$\begin{cases} \frac{x+y}{8} + \frac{x-y}{6} = 5 \dots\dots\dots (1) \\ \frac{x+y}{4} - \frac{x-y}{3} = 10 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

PLAN DE CLASE N° 05

TEMA: Resolución de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos variables.

OBJETIVO: Resuelve sistemas de ecuaciones de primer grado por el método algebraico de igualación.

a) PREGUNTAS DE EXPLORACIÓN

Docente.- ¿En el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 4x + 6y = -5 \dots (1) \\ 6x - 10y = 2 \dots (2) \end{cases}$ se puede decir que es un sistema que admite solución?

Estudiante.- Tendríamos que ver que la fracción formada entre el coeficiente de "x" de la primera ecuación dividido entre el coeficiente de "x" de la segunda ecuación sea diferente de la fracción formada por los coeficientes "y" de la primera ecuación con el coeficiente "y" de segunda ecuación: $\frac{4}{6} \neq \frac{6}{10}$

b) PREGUNTAS DE PRESENTACIÓN

Docente.- ¿El sistema de ecuaciones dado es un sistema compatible determinado?

Estudiante.- Como la comparación de los coeficientes de las variables en la manera que se hizo anteriormente, nos da un resultado diferente, se puede decir que es un sistema de ecuaciones compatible determinado, es decir que si tiene solución.

c) PREGUNTAS DE ASIMILACIÓN

Docente.- ¿Cómo se puede resolver el sistema por el método de igualación?

Estudiante.- Se despeja la misma variable en las dos ecuaciones.

$$\begin{array}{ll} 4x + 6y = -5 \dots \dots \dots (1) & 6x - 10y = 2 \dots \dots \dots (1) \\ 4x = -5 - 6y & 6x = 2 + 10y \\ x = \frac{-5 - 6y}{4} & x = \frac{2 + 10y}{6} \end{array}$$

Docente.- ¿En seguida que se puede hacer?

Estudiante.- Se igualan las expresiones obtenidas y se resuelve la ecuación de una variable.

$$\frac{-5 - 6y}{4} = \frac{2 + 10y}{6}$$

$$6(-5 - 6y) = 4(2 + 10y)$$

$$-30 - 36y = 8 + 40y$$

$$-36y - 40y = 8 + 30$$

$$-76y = 38$$

$$y = \frac{38}{-76}$$

$$y = -\frac{1}{2}$$

Docente.-¿ Cómo obtener el valor de la otra incógnita?

Estudiante.- Se reemplaza el valor de “y” en cualquiera de las ecuaciones del sistema.

$$4x + 6y = -5$$

$$4x + 6\left(-\frac{1}{2}\right) = -5$$

$$4x - \frac{6}{2} = -5$$

$$4x = -5 + \frac{6}{2}$$

$$4x = -5 + 3$$

$$x = \frac{-2}{4}$$

$$x = \frac{-1}{2}$$

d) PREGUNTAS DE ORGANIZACIÓN

Docente.- ¿Cómo comprobar que el par ordenado $\left\{\left(-\frac{1}{2}; \frac{-1}{2}\right)\right\}$ es el conjunto solución?

Estudiante.- Se comprueba en las ecuaciones (1) y (2).

$$4x + 6y = -5 \dots \dots \dots (1)$$

$$6x - 10y = 2 \dots \dots (2)$$

$$4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 6\left(\frac{-1}{2}\right) = -5$$

$$6\left(\frac{-1}{2}\right) - 10\left(\frac{-1}{2}\right) = 2$$

$$\frac{6}{4} - \frac{1}{2} = 1$$

$$\left(\frac{-6}{2} - 10\left(\frac{-1}{2}\right)\right) = 2$$

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

$$-3 + 5 = 2$$

$$\frac{2}{2} = 1$$

$$2 = 2$$

$$1 = 1$$

e) PREGUNTAS DE APLICACIÓN

Docente.-¿ Resolver el sistema de ecuaciones por el método de igualación?

$$\begin{cases} 3\sqrt{2}x - (-\sqrt{2})y = 24 \dots \dots (1) \\ 7\sqrt{2}y - (-5\sqrt{2})x = 8 \dots \dots (2) \end{cases}$$

PLAN DE CLASE N° 06

TEMA: Resolución de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos variables, forma gráfica.

OBJETIVO: Inferir el conjunto solución de un sistema de ecuaciones de primer grado con dos variables, en forma gráfica.

a) PREGUNTAS DE EXPLORACIÓN.

Docente.- ¿La expresión siguiente $f: A \rightarrow R$, donde A es un subconjunto de R, recibe el nombre de?

Estudiante.- Es una función real de variable real.

Docente.- ¿ En el siguiente ejemplo: Sea $A = [0, \sqrt{2}]$ y $f: A \rightarrow R$ dado por $f(x) = x^2$ se puede deducir que $\sqrt{2}$ es pre imagen de la función dada?

Estudiante.- si es una pre-imagen, toda vez que $\sqrt{2}$ es parte del dominio de la función dada.

Docente.- ¿El conjunto de pares ordenados $((x; f(x))$ o $(x; y)$, que determina la función f, le corresponde un conjunto de puntos en el plano, a este conjunto de puntos se le llama?

Estudiante.- A este conjunto de puntos se le llama gráfica de la función.

Docente.- ¿ En el trabajo experimental, donde se hace un intento para descubrir una ley natural o un patrón con los datos obtenidos, casi siempre se emplean las gráficas?

Estudiante.- Si se emplea las gráficas, para examinar detalles de un procedimiento determinado.

Docente.- ¿Se puede representar gráficamente la siguiente función:

$$f(x) = x - 3, \text{ si } D(f) = [0; 5[$$

Estudiante.- Si se puede representar gráficamente la función, la cual será una recta.

b) PREGUNTAS DE PRESENTACIÓN

Docente.- ¿La gráfica de toda función definida por una ecuación de primer grado en dos variables es una?

Estudiante.- La gráfica es siempre en este caso una recta.

c) PREGUNTAS DE ASIMILACIÓN

Docente.- ¿Sea el sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 12 \dots\dots(1) \\ x - 2y = -4 \dots\dots(2) \end{cases}$ que está formado por dos ecuaciones, cada ecuación define?

Estudiante.- Un función lineal y para construir su gráfica respectiva, basta determinar dos de sus puntos, por lo que hay que preferir los de intersección con los ejes coordenados.

Docente.- ¿ En la ecuación número "1", si hacemos $x=0$ y $y=0$, qué valores obtenemos?

Estudiante.- se obtiene los valores siguientes que se observan en la tabla siguiente.

x	y
0	6
4	0

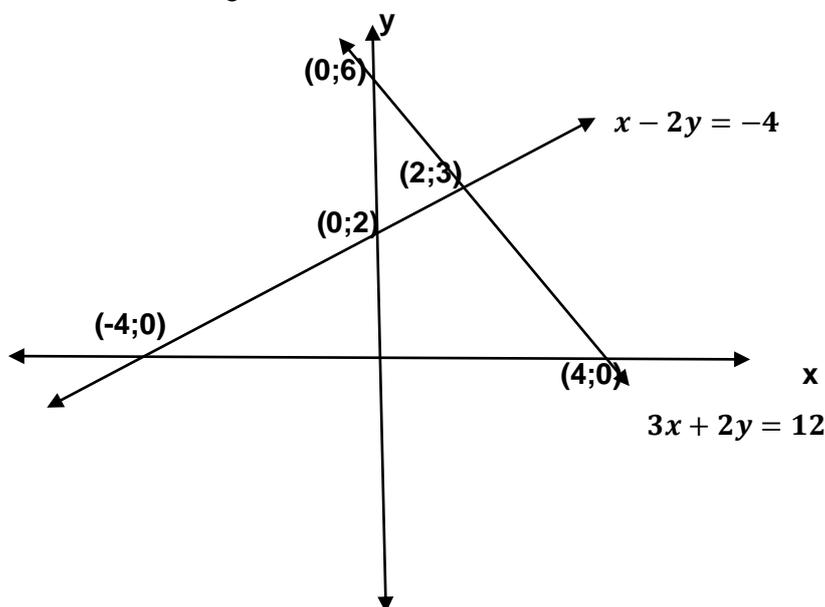
Docente.- ¿En la ecuación número “2”, si hacemos $x=0$ y $y=0$, qué valores obtenemos?

Estudiante.- Se obtiene los valores siguientes que se observan en la tabla siguiente?

x	y
0	2
-4	0

Docente.- ¿Cuál será entonces la gráfica de cada una de las ecuaciones lineales?

Estudiante.- Será la siguiente.



Docente.- ¿ En qué punto se intersecan las dos rectas?

Estudiante.- Se intersecan en el punto $p(2;3)$ y por lo tanto , el conjunto solución del sistema dado es $\{(2; 3)\}$.

d) PREGUNTAS DE ORGANIZACIÓN

Docente.- ¿Cómo se comprueba dicha solución?

Estudiante.- Se comprueba dicho conjunto solución en ambas ecuaciones, como a continuación se indica.

$$\begin{aligned}
 3x + 2y &= 12 \\
 3(2) + 2(3) &= 12 \\
 6 + 6 &= 12 \\
 12 &= 12
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x - 2y &= -4 \\
 2 - 2(3) &= -4 \\
 2 - 6 &= -4 \\
 -4 &= -4
 \end{aligned}$$

e) PREGUNTAS DE APLICACIÓN

Docente.- ¿Resolver gráficamente el sistema?

$$\begin{cases} 5x - 2y = 11 \dots (1) \\ 2x - 3y = 0 \dots (2) \end{cases}$$

PLAN DE CLASE N° 07

TEMA: Clasificación de los sistemas de ecuaciones.

OBJETIVO: Determina cuando un sistema de ecuaciones lineales es compatible o incompatible.

a) PREGUNTAS DE EXPLORACIÓN.

Docente.- ¿ La solución de una sistema de ecuaciones **es un par ordenado?**

Estudiante.- Si es un par ordenado, que gráficamente se lo puede ubicar el eje de coordenadas.

Docente.- ¿ La abscisa y la ordenada son las dos coordenadas de un punto del plano?

Estudiante.- Si, la abscisa se grafica en el eje “x” y la ordenada en el eje “y”

b) PREGUNTAS DE PRESENTACIÓN.

Docente.- ¿ Cada una de las ecuaciones de un sistema de ecuaciones, se puede decir que constituye una función lineal?

Estudiante.- Si cada una de las ecuaciones constituye una función lineal, y se representa con una línea recta en el plano.

Docente.- ¿El punto de intersección de las dos rectas, es una solución del sistema de ecuaciones?

Estudiante.- Si es una solución del sistema de ecuaciones.

c) PREGUNTAS DE ASIMILACIÓN.

Docente.- ¿ Cuándo un sistema tiene solución, que nombre lleva?

Estudiante.- Un sistema que tiene solución se denomina, sistema compatible

Docente.- ¿ Los sistemas compatible tienen alguna clasificación?

Estudiante. Si los sistemas se clasifican en sistemas compatibles determinados y los sistemas compatibles indeterminados.

Docente.- ¿Qué características tiene un sistema compatible determinado?

Estudiante.- Un sistema compatible determinado, es aquel que tiene una cantidad **limitada** de soluciones.

Docente.- ¿Qué características tiene un sistema compatible indeterminado?

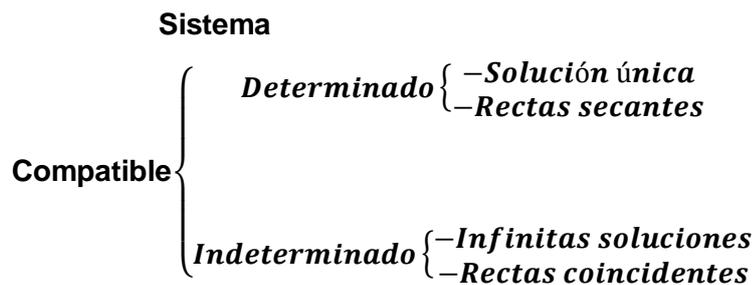
Estudiante.- Un sistema compatible indeterminado, es aquel que tiene una cantidad ilimitada de soluciones.

Docente.- ¿ Cuando un sistema de ecuaciones no tiene solución como se denomina?

Estudiante.- A dichos sistemas se les denomina sistema incompatible o absurdo.

Docente.- ¿Cuáles serán las posiciones de las rectas en el plano, en los diferentes sistemas de ecuaciones?

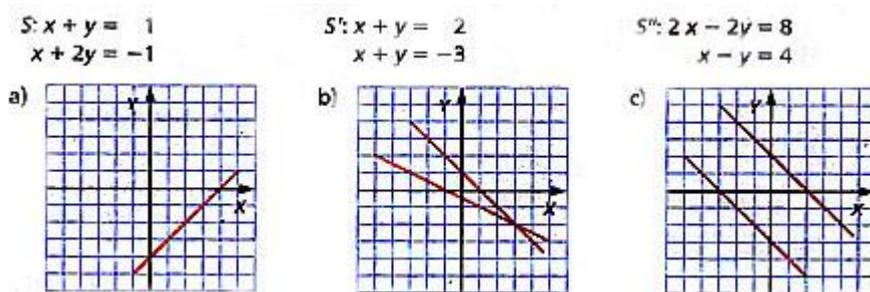
Estudiante: a continuación indicaré un resumen sobre el particular.



Sistema incompatible { -No tiene solución
-Rectas paralelas.

d) PREGUNTAS DE ORGANIZACIÓN.

Docente.- ¿A continuación tiene usted tres gráficos me puede indicar que clases de sistemas son según su solución?



Estudiante.- El gráfico de la figura a) es un sistema compatible indeterminado, ya que son rectas coincidentes; y tiene infinitas soluciones.

El gráfico de la figura b) es un sistema compatible determinado, ya que las rectas son secantes; y tiene una solución.

El Gráfico de la figura c) es un sistema incompatible, ya que son rectas paralelas y no tiene solución.

e) PREGUNTAS DE APLICACIÓN.

Docente.- ¿Después de resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 4 = 2y \dots\dots (1) \\ \frac{x-y}{5} = \frac{x-y}{3} \dots\dots (2) \end{cases} \quad \text{que clase de sistema es?}$$

PLAN DE CLASE N° 08

TEMA: Matrices y Determinantes

OBJETIVOS:

- ✓ Definir el concepto de matriz, reconociendo el orden.
- ✓ Identificar el concepto de determinante, reconociendo sus propiedades y el desarrollo de determinantes de segundo y tercer orden.

a) PREGUNTAS DE EXPLORACIÓN.

Docente.- ¿En una pensión se ha comido, en kilos, durante el primer trimestre del 2015, arroz, azúcar y leche, de acuerdo al siguiente cuadro:

Artículos Meses	Arroz	Azúcar	leche
Enero	20	15	40
Febrero	30	16	26
Marzo	40	35	50

Si en este cuadro omitimos las filas y las columnas de los artículos y de los meses, como quedan dispuestos las cantidades?

Estudiante.-Las cantidades quedan dispuestos de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} 20 & 15 & 40 \\ 30 & 16 & 26 \\ 40 & 35 & 50 \end{array}$$

Docente.-¿ A este grupo de números dispuestos en filas y columnas, se los puede agrupar con un corchete?

Estudiante.- Si se los puede agrupar con un corchete y quedaría de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 20 & 15 & 40 \\ 30 & 16 & 26 \\ 40 & 35 & 50 \end{bmatrix}$$

b) PREGUNTAS DE PRESENTACIÓN.

Docente.- ¿La información del ejemplo ha sido ordenada en filas y columnas, este ejemplo nos da la idea de matriz?

Estudiante.- Sí, ósea que una matriz es un arreglo rectangular de números dispuestos en filas y columnas, encerradas entre corchetes.

Docente.- ¿En el ejemplo siguiente, indique los elementos de las filas y de las columnas?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Estudiante.- Los elementos de la primera fila son: 1, 2,-1

Los elementos de la segunda fila son: 0, 1,3

Los elementos de la primera columna son: 1,0

Los elementos de la segunda columna son: 2,1

Los elementos de la tercera columna son -1,3

Docente.- ¿Cuándo se habla del orden de una matriz, a que nos referimos alumnos?

Estudiante.- El orden se refiere a número de filas y de columnas que tiene la matriz. Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz del ejemplo tiene 3 filas y dos columnas, por lo que se dice que es de orden 3x2.

Docente.- ¿Una matriz que tiene el mismo número de filas y columnas se denomina?

Estudiante.- La matriz que tiene el mismo número de filas y columnas se denomina matriz cuadrada. Como la siguiente.

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \\ -5 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

c) PREGUNTAS DE ASIMILACIÓN.

Docente.- ¿En una matriz cuadrada existe la diagonal principal y la diagonal secundaria, alumnos en la siguiente matriz, cual es La diagonal principal y cuál es la secundaria ¿

$$\begin{bmatrix} 7 & 7 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Estudiante.- Los números 7,1 y 9 están en la diagonal principal y los números 6, 1, y 6 se encuentran en la diagonal secundaria.

Docente.- ¿El determinante, es un concepto que se aplica a las matrices cuadradas, y este es un valor, al que le asignamos el nombre de determinante?

Estudiante.- Sí así es, para referirnos al DETERMINANTE de una matriz cuadrada, encerramos los elementos de esta entre barras. El determinante puede ser representado así:

Si la matriz es A, el determinante será $|A|$ o ΔA ejemplo.

Sea la matriz A, de orden 3x3:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

El determinante de la matriz A de 3° orden lo representamos así:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

Docente.-¿Cómo calculamos DETERMINANTES?

Estudiante.- Primeramente tenemos que observar de qué orden es la matriz.

Docente.-¿ Sea la matriz cuadrada siguiente $p = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$, cuál será su

determinante?

Estudiante.- En este caso la determinante es de segundo orden; para su cálculo, tenemos que multiplicar los elementos de la diagonal principal y a este resultado restarle del producto de los valores de la diagonal secundaria. $\Delta p = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$

$$\Delta p = 3 \times 2 - 7 \times 5 = 6 - 35 = -29.$$

Docente.- ¿Cómo calculamos determinantes de tercer orden?

Estudiante.- El valor se obtiene aplicando la **regla de Sarrus, que consiste en repetir las dos primeras filas o las dos primeras columnas.** Así:

Sea la matriz $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

calculemos su determinante $\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

$$S_2 = 12 \quad S_1 = -3$$

Luego el determinante $\det(A) = S_1 \cdot S_2 = -3 \cdot 12 = -36$.

d) **PREGUNTAS DE ORGANIZACIÓN.**

Docente.- ¿Sea la matriz $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ calcule el determinante de B en

forma vertical y horizontal, aplicando la **Regla de Sarrus.**

Estudiante.- Por la regla horizontal, se escribe las dos primeras columnas en el lado derecho, para hallar el determinante.

$\text{Det}(B) = \Delta A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

$$\Delta A = 8 + (-4) + (-15) - (10 - 2 - 24) = 8 - 4 - 15 - (-16) = -11 + 16 = 5$$

Por la regla vertical, se escribe las dos primeras filas en la parte inferior, para hallar el determinante.

$\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$\Delta A = 8 - 15 - 4 - (10 - 2 - 24) = 8 - 15 - 4 - (-16) = -11 - (-16) = -11 + 16 = 5$, lo que verifica que es el mismo resultado, ya sea se lo haga en forma horizontal o vertical.

e) **PREGUNTAS DE APLICACIÓN.**

Docente.- ¿Sean las matrices $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 10 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ determina?

a) $|C|$

b) $|D|$

c) Comenta tus resultados

PLAN DE CLASE N° 09

TEMA: Sistema de Ecuaciones de primer grado con dos variables.

OBJETIVOS:

- ✓ Resuelven sistemas de ecuaciones de primer grado con dos variables por determinantes (Regla de Cramer).

a) PREGUNTAS DE EXPLORACIÓN.

Docente.- ¿Gabril Cramer (1707-1752), físico de nacionalidad suiza, desarrollo un algoritmo para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas, por determinantes?

Estudiante.- Sí.

Docente.- ¿ Para llegar a los actuales métodos de resolución de sistemas de ecuaciones han pasado más de tres milenios?

Estudiante.- si, pero ya los Babilonios (periodo 600 a.c a 300 d.c) resolvieron ya los sistemas de ecuaciones lineales, ellos llamaban a las incógnitas con palabras tales como longitud, anchura, área o volumen, sin que tuvieran relación con problemas de medida.

Docente.- ¿Los griegos también resolvían sistemas de ecuaciones?

Estudiante. Si pero resolvían sistemas de ecuaciones pero utilizando métodos geométricos.

b) PREGUNTAS DE PRESENTACIÓN.

Docente.- ¿Determina el conjunto solución de la siguiente ecuación: $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 11$

Estudiante.- primer paso, hallamos el MCM de los denominadores de la ecuación.

2, 3 es igual a 6, luego dividimos este MCM entre los denominadores de la ecuación y lo multiplicamos por el numerador, como a continuación se indica.

$$\begin{aligned}6x + 3x + 2x &= 66 \\11x &= 66 \\x &= \frac{66}{11} \\x &= 6\end{aligned}$$

Por lo tanto el conjunto solución es: {6}.

C. PREGUNTAS DE ASIMILACIÓN.

Docente.- ¿El siguiente sistema: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ es un sistema de ecuaciones con dos variables?

Estudiante.- Si es un sistema de ecuaciones con dos variables "x" e "y".

Docente.- ¿Resolver el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 3x + 2y = 23 \dots (1) \\ 5x - 3y = 13 \dots (2) \end{cases}$ por determinantes o regla de Cramer?

Estudiante.- El valor de una de las variables o incógnitas es igual al cociente de **dos determinantes**, en el **denominador** aparece el determinante del sistema y

en el numerador también aparece, pero reemplazando los coeficientes de la incógnita por los términos independientes correspondientes.

Primero se debe calcular el determinante del sistema; para calcular el determinante del sistema ΔS , el cual está formado por los coeficientes de las incógnitas, y se procede de la siguiente manera.

$$\Delta S = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = (3)(-3) - (5)(2) = -9 - 10 = -19$$

Luego hallamos el determinante e "x" $\Delta x = \begin{vmatrix} 23 & 2 \\ 13 & -3 \end{vmatrix} = (23)(-3) - (13)(2) = -69 - 26 = -95$

Luego hallamos el determinante de "y" $\Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 23 \\ 5 & 13 \end{vmatrix} = (3)(13) - (5)(23) = 39 - 115 = -76$

- ✓ El valor de la variable "x" se halla dividiendo el determinante que corresponde a la variable "x" entre el determinante del sistema:

$$\text{O sea: } x = \frac{\Delta x}{\Delta S} \rightarrow x = \frac{-95}{-19} = +5$$

- ✓ El valor de la variable "y" se halla dividiendo el determinante que corresponde a la variable "y" entre el determinante del sistema:

$$\text{O sea: } y = \frac{\Delta y}{\Delta S} \rightarrow y = \frac{-76}{-19} = +4$$

- ✓ El conjunto solución del sistema es: **C.S. = {(5; 4)}**

d) PREGUNTAS DE ORGANIZACIÓN.

Docente.- ¿Cómo se comprueba dicha solución en el sistema de ecuaciones?

Estudiante.- En cada ecuación de sistema se comprueba el conjunto solución.

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 23 \\ 3(5) + 2(4) &= 23 \\ 15 + 8 &= 23 \\ 23 &= 23 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x - 3y &= 13 \\ 5(5) - 3(4) &= 13 \\ 25 - 12 &= 13 \\ 13 &= 13 \end{aligned}$$

e) PREGUNTAS DE APLICACIÓN.

Docente.- Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones, con dos variables; por la regla de Cramer, y compruebe su respuesta:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{y+1}{4} = 1 \\ \frac{x}{3} + \frac{2y-3}{6} = 2 \end{cases}$$

PLAN DE CLASE N° 10

TEMA: Sistema de Ecuaciones de primer grado con tres variables.

OBJETIVOS:

- ✓ Resuelven sistemas de ecuaciones de primer grado con tres variables por determinantes (Regla de Cramer).

a) PREGUNTAS DE EXPLORACIÓN.

Docente.- ¿Cuál es la clasificación de los sistemas de ecuaciones?

Estudiante.- Un sistema de ecuaciones es **compatible determinado**, cuando tiene solución única. Además si se tiene el sistema:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ mx + ny = p \end{cases} \rightarrow \frac{a}{m} \neq \frac{b}{n}$$

Un sistema de ecuaciones es **compatible indeterminado**,

cuando tiene infinitas soluciones y además: $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p}$

Un sistema es **Incompatible**, cuando no tiene solución y

además: $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} \neq \frac{c}{p}$

Docente.- ¿Qué tienen que cumplir los determinantes, en un sistema de ecuaciones, para su clasificación?

Estudiante.- Si $\Delta S = 0$ y ($\Delta x \neq 0$ y $\Delta y \neq 0$) El sistema es **incompatible**.

Si $\Delta S = 0$ y ($\Delta x = 0$ y $\Delta y = 0$) El sistema es **compatible indeterminado**.

Si $\Delta S \neq 0$ el sistema es **compatible determinado**.

b) PREGUNTAS DE PRESENTACIÓN.

Docente.- ¿Qué valor debe tener "k" para que el sistema lineal: $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 3x + ky = 6 \end{cases}$ sea compatible indeterminado.

Estudiante.- Para que sea compatible indeterminado, se tiene que cumplir que:

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{k} = \frac{2}{6} \rightarrow k = 6$$
$$2k = 12 \rightarrow k = \frac{12}{2} = 6$$

c) PREGUNTAS DE ASIMILACIÓN.

Docente.- ¿Qué se puede decir de la siguiente expresión?

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = -2 \\ -x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases}$$

Estudiante.- que es un sistema de ecuaciones lineales que tiene tres variables: "x", "y" y "z"

Docente.- ¿Si es un sistema de ecuaciones lineales como se puede encontrar su conjunto solución?

Estudiante.- Para resolver el sistema de ecuaciones lineales, tenemos que aplicar la regla de Cramer, para determinar los valores, cuya solución es una terna de números:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta S}, \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta S}, \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta S}$$

Docente.-¿ Cómo se procede a ejecutar el paso anterior?

Estudiante.- Primero hay que calcular los determinantes como a continuación se indica:

$$\Delta S = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 8 & -2 & 1 & 8 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 8 & 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -4$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 8 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6$$

Docente.- ¿Teniendo los determinantes, como se calcula el valor de cada variable?

Estudiante.- Aplicando lo siguiente:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta S}, = \frac{2}{2} = 1$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta S} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$, z = \frac{\Delta z}{\Delta S} = \frac{6}{2} = 3$$

Docente.- ¿Cuál es el conjunto solución?

Estudiante.- El conjunto solución del sistema de ecuaciones dado es:

$$CS = \{(1; -2; 3)\}$$

d) PREGUNTAS DE ORGANIZACIÓN.

Docente.- ¿Cómo se comprueba que el sistema de ecuaciones ha sido resuelto correctamente?

Estudiante.- Se comprueba en cada ecuación del sistema, como a continuación se indica.

$$2x - y - 2z = -2$$

$$2(1) - (-2) - 2(3) = -2$$

$$2 + 2 - 6 = -2$$

$$4 - 6 = -2$$

$$-2 = -2$$

$$-x + y + z = 0$$

$$-1 + (-2) + 3 = 0$$

$$-1 - 2 + 3 = 0$$

$$-3 + 3 = 0$$

$$0 = 0$$

$$x - 2y + z = 8$$

$$1 - 2(-2) + 3 = 8$$

$$1 + 4 + 3 = 8$$

$$8 = 8$$

e) **PREGUNTAS DE APLICACIÓN.**

Docente.- ¿Cómo se resuelve el sistema y se halla el valor de $x + y + z$?

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 5x + 2y - 5z = -7 \end{cases}$$