

UNIVERSIDAD PRIVADA ANTENOR ORREGO
FACULTAD DE INGENIERÍA
PROGRAMA DE ESTUDIO DE INGENIERÍA ELECTRONICA



TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE
INGENIERO ELECTRÓNICO

Estudio comparativo entre el método de sintonización PID de forma clásica y
por optimización convexa mediante LMI para sistemas MIMO 2X2 de primer
orden

Línea de investigación:

Robótica y Automatización avanzada

Autores:

Córdova Paz Soldán, Kevin Matías
Lama Ríos, Brandon Stefano Dag

Jurado evaluador:

Presidente : Vargas Díaz, Luis Alberto
Secretario : De la Cruz Rodriguez, Oscar Miguel
Vocal : Alvarado Rodriguez, Luis Enrique

Asesor:

Linares Vértiz, Saúl

Código Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-4272-9743>

Trujillo-Perú
2023

Fecha de Sustentación: 2023/11/13

Estudio comparativo entre el método de sintonización PID clásico y por optimización convexa mediante LMI para sistemas MIMO 2X2 de primer orden

por Brandon Stefano Lama Rios



Fecha de entrega: 03-nov-2023 04:33p.m. (UTC-0500)

Identificador de la entrega: 2216695676

Nombre del archivo: INFORME_DE_TESIS_FINAL.docx (7.3M)

Total de palabras: 14497

Total de caracteres: 79223

Estudio comparativo entre el método de sintonización PID clásico y por optimización convexa mediante LMI para sistemas MIMO 2X2 de primer orden

INFORME DE ORIGINALIDAD

11%

INDICE DE SIMILITUD

11%

FUENTES DE INTERNET

0%

PUBLICACIONES

0%

TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1

kupdf.net

Fuente de Internet

7%

2

azdoc.tips

Fuente de Internet

5%

Excluir citas

Activo

Excluir coincidencias < 5%

Excluir bibliografía

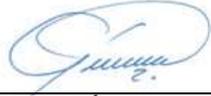
Activo



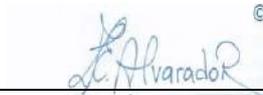
Jurado de sustentación Oral



Ms. VARGAS DÍAZ, LUIS ALBERTO
N° CIP 104175
Presidente



DE LA CRUZ RODRÍGUEZ, OSCAR MIGUEL
N° CIP 85598
Secretario



ALVARADO RODRÍGUEZ, LUIS ENRIQUE
N° CIP 149200
Vocal

Entregado el:

Aprobado por:



CORDOVA PAZ SOLDAN KEVIN MATÍAS
DNI 75709477



LAMA RIOS, BRANDON STEFFANO DAG
DNI 72746395



LINARES VERTIZ, SAUL
CIP 142213
Asesor de Tesis

UNIVERSIDAD PRIVADA ANTENOR ORREGO
FACULTAD DE INGENIERÍA
PROGRAMA DE ESTUDIO DE INGENIERÍA ELECTRONICA



TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE
INGENIERO ELECTRÓNICO

Estudio comparativo entre el método de sintonización PID de forma clásica y
por optimización convexa mediante LMI para sistemas MIMO 2X2 de primer
orden

Línea de investigación:

Robótica y Automatización avanzada

Autores:

Córdova Paz Soldán, Kevin Matías
Lama Ríos, Brandon Stefano Dag

Jurado evaluador:

Presidente : Vargas Díaz, Luis Alberto
Secretario : De la Cruz Rodriguez, Oscar Miguel
Vocal : Alvarado Rodriguez, Luis Enrique

Asesor:

Linares Vértiz, Saúl

Código Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-4272-9743>

Trujillo-Perú
2023

Fecha de Sustentación: 2023/11/13

DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

Yo, Saúl Linares Vértiz, docente del Programa de Estudio de Pregrado de la Universidad Privada Antenor Orrego, asesor de la tesis titulada “Estudio comparativo entre el método de sintonización PID clásico y por optimización convexa mediante LMI para sistemas MIMO 2X2 de primer orden”, de los autores Córdova Paz Soldán, Kevin Matías y Lama Ríos, Brandon Stefano Dag.

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud del 11%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software Turnitin el día 03 de noviembre del 2023.
- He revisado con detalle dicho reporte de la tesis “Estudio comparativo entre el método de sintonización PID clásico y por optimización convexa mediante LMI para sistemas MIMO 2X2 de primer orden” y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las normas establecidas por la Universidad.

Ciudad y fecha: Trujillo, 06 de noviembre de 2023.



LINARES VÉRTIZ, SAÚL NOÉ

DNI: 18092700

ORCID:

<https://orcid.org/0000-0002-4272-9743>



CÓRDOVA PAZ SOLDÁN, KEVIN MATÍAS

DNI: 75709477



LAMA RÍOS, BRANDON STEFANO DAG

DNI: 72746395

Dedicatoria

Gracias a Dios por permitirme estar acá y culminar esta etapa en mi vida; esta tesis va dirigida a mis padres, Ronald Lama y Leyla Ríos; mi hermana, Grecia Lama; mi mascota, Puppy; a mi abuela, Fanny Burgos; a mis tíos; primos y a mi compañera, Ana Torres quienes siempre me apoyaron, acompañaron y confiaron en mi en todo este tiempo; este trayecto no ha sido fácil, pero lo conseguí con mucho esfuerzo y dedicación.

Gracias por estar presente no solo en esta etapa de mi vida, sino en todo momento dándome y ofreciéndome lo mejor, su tiempo y espacio, buscando lo mejor para mí, dándome consejos y haciendo mi vida mucho más feliz.

Lama Ríos, Brandon Stefano Dag

A toda mi familia, amigos y compañeros que me apoyaron y aconsejaron en este camino profesional.

A mi madre, por enseñarme desde pequeño a ser un luchador, a perseguir mis sueños y no dejarme caer en los momentos difíciles, esto es para ti.

Córdova Paz Soldán, Kevin Matías

Agradecimientos

Con mucha gratitud, a todos los docentes ingenieros de la Escuela Profesional de Ingeniería Electrónica UPAO, que compartieron con nosotros todos los conocimientos para hacer posible una de nuestras metas en nuestra vida profesional, especialmente al Mg. Ing. Saul Noe Linares Vértiz, por su paciencia, motivación y su valiosa guía y asesoramiento profesional; por haber inculcado en nosotros el sentido de indagación e investigación en todo el sentido de responsabilidad y rigor académico, sin los cuales no habiéramos hecho posible este trabajo de investigación, para así obtener la titulación profesional. Muchas gracias a todos por el apoyo que nos brindaron.

Los autores

Resumen

En el presente trabajo de investigación se puso como objetivo establecer qué tipo de control es mejor en base al menor tiempo de establecimiento que se presente de los dos controles que son: método convencional y el método de optimización convexa mediante LMI, para plantas MIMO 2x2 de primer orden.

Cabe resaltar que en la actualidad no hay muchos trabajos que tengan como fundamento LMI para sintonización, es por eso que para poder obtener los tiempos de establecimiento se procedió a simular el entorno mediante el modelo matemático extraído de trabajos anteriormente desarrollados. Al tener todo el escenario listo, se procede a realizar la toma de datos en todos los casos con variaciones en los modelos matemáticos para poder determinar una generalidad. Se encontró que, de 40 datos obtenidos, en 38 hay una mejora, esto nos da un valor de 95% de mejora en base a la muestra total.

Para poder validar la hipótesis, se utilizó la herramienta t-Student y así se puede determinar si hubo cambios o no, con esta herramienta se validó la hipótesis planteada.

Palabras clave: LMI, MIMO, optimización convexa, primer orden, sintonización, modelo matemático

Abstract

In this research work, the objective was to establish which type of control is better based on the shortest establishment time that occurs between the two controls, which are: conventional method and the convex optimization method using LMI, for 2x2 MIMO plants of first order.

It should be noted that currently there are not many works that are based on LMI for tuning, which is why in order to obtain the establishment times, the environment was simulated using the mathematical model extracted from previously developed works. Having the entire scenario ready, we proceed to collect data in all cases with variations in the mathematical models in order to determine a generality.

It was found that, of 40 data obtained, there is an improvement in 38, this gives us a value of 95% improvement based on the total sample.

In order to validate the hypothesis, the t-Student tool was used and thus it can be determined whether there were changes or not, with this tool the proposed hypothesis was validated.

Keywords: LMI, MIMO, convex optimization, first order, tuning, mathematical model

Presentación

Señores miembros del Jurado:

De conformidad con lo estipulado en el Reglamento de Grados y Títulos de la Universidad Privada Antenor Orrego, ponemos a su disposición el informe de tesis titulado “Estudio comparativo entre el método de sintonización PID clásico y por optimización convexa mediante LMI para sistemas MIMO 2X2 de primer orden” para que sea revisado y evaluado y de ser aprobado pueda ser defendido oralmente para optar el título profesional de Ingeniero Electrónico.

De antemano, nos excusamos de los errores involuntarios en que se hubiera incurrido en el desarrollo y redacción del misma, esperando del honorable jurado un justo dictamen.

Córdova Paz Soldán, Kevin Matías
Lama Ríos, Brandon Stefano Dag

TABLA DE CONTENIDOS

Dedicatoria	7
Agradecimientos.....	8
Resumen	9
Abstract	10
Presentación	11
TABLA DE CONTENIDOS	12
ÍNDICE DE FIGURAS	14
ÍNDICE DE ECUACIONES	15
I. INTRODUCCIÓN	17
1.1 Problema de Investigación.....	17
1.2 Objetivos de la investigación	18
1.3 Justificación del Estudio.....	19
II. MARCO DE REFERENCIA	19
2.1 Antecedentes del estudio.....	19
2.2 Marco teórico.....	21
2.3 Marco conceptual	52
2.4 Sistema de Hipótesis	63
2.5 Variables e indicadores	63
III. METODOLOGÍA EMPLEADA	63
3.1 Tipo y nivel de investigación	63
3.2 Población y muestra de estudio	63
3.3 Diseño de contrastación	65
3.4 Diseño de investigación.....	65
3.5 Procedimiento.....	65
3.6 Técnicas e instrumentos de investigación.....	66
3.7 Procesamiento y análisis de datos.....	66
IV. PRESENTACIÓN DE RESULTADOS	66
4.1 Análisis e interpretación de resultados.....	66
V. DISCUSIÓN DE RESULTADOS	73
CONCLUSIONES	74
RECOMENDACIONES	75
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	76
ANEXOS	78

ÍNDICE DE TABLAS

<i>Tabla 1. Datos ingresados mediante Checklist.</i>	<i>67</i>
<i>Tabla 2. Valor de mejora entre PID y LMI.</i>	<i>68</i>

ÍNDICE DE FIGURAS

<i>Figura 1. Diagrama de bloques de un sistema invariante en el tiempo en representación de espacio de estados. Fuente: Ogata, K. (2002). Modern Control Engineering (4.a ed.). Prentice Hall. p. 73.</i>	<i>27</i>
<i>Figura 2. Sistema en cascada. Fuente: Skogestad, S., & Postlethwaite, I. (2005). Multivariable Feedback Control: Analysis and Design (2.a ed.). p.64. .</i>	<i>36</i>
<i>Figura 3. Sistema en retroalimentación. Skogestad, S., & Postlethwaite, I. (2005). Multivariable Feedback Control: Analysis and Design (2.a ed.). p.64. .</i>	<i>36</i>
<i>Figura 4. Diagrama de bloque de un bucle de retroalimentación básico.</i>	<i>38</i>
<i>Figura 5. Diagrama de bloque de sistemas en lazo abierto y cerrado sujetos a las mismas perturbaciones.</i>	<i>42</i>
<i>Figura 6. Diagrama de Nyquist de la función de transferencia del lazo que muestra la interpretación grafica de la sensibilidad máxima.</i>	<i>43</i>
<i>Figura 7. Simulación de un sistema en lazo cerrado con control proporcional. Aström, K., & Hägglund, T. (2009). Control PID Avanzado. p. 69</i>	<i>50</i>
<i>Figura 8. Simulación de un sistema en lazo cerrado con control proporcional e integral. Aström, K., & Hägglund, T. (2009). Control PID Avanzado. p.71</i>	<i>51</i>
<i>Figura 9. Interpretación de la acción derivativa como control predictivo, donde la predicción se obtiene por extrapolación lineal. Aström, K., & Hägglund, T. (2009). Control PID Avanzado. p.72.....</i>	<i>52</i>
<i>Figura 10. Ejemplo de programación semidefinida.</i>	<i>59</i>
<i>Figura 11. Determinación grafica de modelos matemáticos para sistemas con una respuesta en escalón oscilatorio.</i>	<i>61</i>
<i>Figura 12. Especificaciones sobre el seguimiento del punto de consigna basadas en la respuesta temporal a un escalón unitario en el punto de consigna. La curva superior muestra la respuesta de salida, y la curva inferior muestra la señal de control correspondiente.....</i>	<i>62</i>
<i>Figura 13. Diseño de contrastación.....</i>	<i>65</i>
<i>Figura 14. Región de rechazo de hipótesis nula.</i>	<i>68</i>
<i>Figura 15. Análisis de hipótesis nula en entrada 1 de la Planta 1.</i>	<i>70</i>
<i>Figura 16. Análisis de hipótesis nula en entrada 2 de la Planta 1.</i>	<i>70</i>
<i>Figura 17. Análisis de hipótesis nula en entrada 1 de la Planta 2.</i>	<i>71</i>
<i>Figura 18. Análisis de hipótesis nula en entrada 2 de la Planta 2.</i>	<i>72</i>

ÍNDICE DE ECUACIONES

<i>Ecuación 1. Transformada de Laplace representada en límites.</i>	<i>21</i>
<i>Ecuación 2. Transformada de Laplace.</i>	<i>21</i>
<i>Ecuación 3. Transformada de Laplace representada como integral de inversión. .</i>	<i>21</i>
<i>Ecuación 4. Ecuación diferencial de un sistema lineal e invariante en el tiempo. ...</i>	<i>22</i>
<i>Ecuación 5. Función de transferencia representada de diferentes maneras.</i>	<i>22</i>
<i>Ecuación 6. Sistema de n entradas múltiples.</i>	<i>25</i>
<i>Ecuación 7. Sistema de n salidas múltiples.</i>	<i>25</i>
<i>Ecuación 8. Ecuación de estado de un sistema lineal.</i>	<i>25</i>
<i>Ecuación 9. Salida del sistema lineal.</i>	<i>26</i>
<i>Ecuación 10. Ecuación de estado linealizada.</i>	<i>26</i>
<i>Ecuación 11. Ecuación de salida del sistema linealizada.</i>	<i>26</i>
<i>Ecuación 12. Ecuación de estado de un sistema invariable en el tiempo.</i>	<i>26</i>
<i>Ecuación 13. Ecuación de salida de un sistema invariable en el tiempo.</i>	<i>26</i>
<i>Ecuación 14. Función de transferencia de sistema en el dominio s.</i>	<i>27</i>
<i>Ecuación 15. Sistema representado en el espacio de estados.</i>	<i>27</i>
<i>Ecuación 16. Ecuación de estado de un sistema en el dominio s.</i>	<i>27</i>
<i>Ecuación 17. Ecuación de salida de un sistema en el dominio s.</i>	<i>27</i>
<i>Ecuación 18. Función de transferencia del sistema en términos de A, B, C y D. ...</i>	<i>28</i>
<i>Ecuación 19. Fórmula característica de polos de un sistema.</i>	<i>29</i>
<i>Ecuación 20. Ecuaciones en el espacio de estados representadas por matrices. .</i>	<i>30</i>
<i>Ecuación 21. Fórmula para calcular ceros en el espacio de estados.</i>	<i>30</i>
<i>Ecuación 22. Respuesta para un sistema dinámico de la forma $x = Ax + Bu$.</i>	<i>31</i>
<i>Ecuación 23. Matriz gramiana de controlabilidad en el tiempo t.</i>	<i>32</i>
<i>Ecuación 24. Gramiana de controlabilidad.</i>	<i>32</i>
<i>Ecuación 25. Solucion para la gramiana de controlabilidad mediante la ecuación de Lyapunov.</i>	<i>32</i>
<i>Ecuación 26. Matriz gramiana de observabilidad.</i>	<i>33</i>
<i>Ecuación 27. Solución para la gramiana de observabilidad mediante la ecuación de Lyapunov.</i>	<i>33</i>
<i>Ecuación 28. Regla de avance.</i>	<i>36</i>
<i>Ecuación 29. Controlador feedforward.</i>	<i>37</i>
<i>Ecuación 30. Funciones transferencia de las señales internas X, Y y U.</i>	<i>38</i>
<i>Ecuación 31. Funciones de sensibilidad – The Gang of Six.</i>	<i>38</i>
<i>Ecuación 32. Función de transferencia de lazo abierto.</i>	<i>39</i>
<i>Ecuación 33. Función de transferencia desde el punto de consigna a la variable de</i>	

proceso.....	41
Ecuación 34. Variación relativa en la función de transferencia G.	41
Ecuación 35. Relación entre la salida del sistema en lazo cerrado y lazo abierto.	42
Ecuación 36. Sensibilidad máxima en frecuencia de cruce de sensibilidad.	43
Ecuación 37. Integral de Bode.....	44
Ecuación 38. Acotaciones para márgenes de ganancia y fase.....	44
Ecuación 39. Función de transferencia representada por la sensibilidad complementaria.	46
Ecuación 40. Aproximación de perturbaciones de carga en bajas frecuencias (bajas s).....	47
Ecuación 41. Función de transferencia del ruido de medida a la señal de control.	48
Ecuación 42. Aproximación de ruido de medida para altas frecuencias (grandes s).	48
Ecuación 43. Controlador proporcional.....	49
Ecuación 44. Polarización de un controlador proporcional.	49
Ecuación 45. Controlador integral.....	50
Ecuación 46. Función de salida de un controlador PI.	51
Ecuación 47. Controlador PID ideal.....	52
Ecuación 48. Desigualdad de Lyapunov.....	54
Ecuación 49. Formula general de un LMI.	55
Ecuación 50. Formula general de un problema de optimización.....	56
Ecuación 51. Dominio del problema de optimización.....	57
Ecuación 52. Fórmula general de un problema de optimización convexa.	58
Ecuación 53. Fórmula general de un programa semidefinido.	59
Ecuación 54. Planta 1. Columna de destilación 2x2 de Vinante-Luyben.	64
Ecuación 55. Planta 2. Reactor de polimerización a escala industrial.	64
Ecuación 56. Error de mejora entre LMI y PID clásico.....	67
Ecuación 57. Desviación estándar.....	69
Ecuación 58. Formula t-Student.	69

I. INTRODUCCIÓN

1.1 Problema de Investigación

a. Descripción de la realidad problemática

(Albertos & Sala, 2003) Controlar un proceso no es un procedimiento complejo, actualmente existen diversos métodos, equipos y herramientas tanto a nivel de software como de hardware que te permiten realizar el correcto análisis matemático y su respectiva aplicación en alguna planta, sistema y/o proceso en general.

Existen muchos niveles de control, desde un simple control ON/OFF hasta el tradicional control PID. Esencialmente en este último nos enfocaremos, ya que es comúnmente usado en la industria debido a que provee la manera más fácil y eficiente de encontrar la solución para aplicaciones industriales. Para este proceso es necesario únicamente ajustar tres parámetros y se consigue un rendimiento razonable o bueno en una gran variedad de plantas. (Nisi et al., 2018)

El efecto de los parámetros de ajuste (o ganancias) en el rendimiento del circuito cerrado se conoce bien y existen reglas sencillas y bien conocidas para ajustar estos parámetros. Las aplicaciones más comunes de estos controladores son en la forma de procesos SISO (single-input single- output), el cual tiene una larga historia que se remonta al menos a 250 años atrás, siendo el más popular en la industria durante más de 50 años. (Boyd et al., 2016)

La teoría de control clásica es adecuada para los sistemas de una entrada y una salida (SISO), pero resulta poco eficaz para los de entradas múltiples y salidas múltiples (MIMO), ya que las técnicas graficas resultan incómodas de aplicar con este tipo de sistemas. Se observa que la teoría de control moderna está desarrollando nuevas y consistentes metodologías de diseño para sistemas MIMO.

La mayoría de los trabajos existentes se han centrado en el control PID de un solo lazo, su teoría y diseño están bien establecidos, comprendidos y aplicados en la práctica. Se

pueden clasificar a grandes rasgos en métodos directos e indirectos basadas en experiencias pasadas y heurísticas, el diseño de control indirecto basado en parámetros del modelo como el modelo Ziegler-Nichols, asignación de polos, respuesta en frecuencia y técnicas de optimización. Sin embargo, la mayoría de los procesos industriales son de naturaleza multivariable. (Wang et al., 2008)

La motivación de por qué nos centramos en investigar este particular campo de nuestra carrera se encuentra en que, con todo su poder y ventajas, el control moderno carece de algunos aspectos, ya que no es raro que el sistema de control PID multivariable en su conjunto pueda fallar, aunque cada lazo PID funcione bien. Siendo la demanda para abordar las interacciones entre variables alta para la aplicación con éxito del control PID en procesos multivariables y evidente para las principales empresas líderes de control que clasificaron los acoplamientos de los sistemas multivariables como el principal problema común en la industria.

b. Descripción del problema

A diferencia de los procesos SISO, las interacciones de bucle deben investigarse cuidadosamente para procesos MIMO. Por lo tanto, el emparejamiento de bucles tiene un gran efecto en el rendimiento para el bucle cerrado. Por lo general, se usan métodos para tener un criterio de emparejamiento de bucles, y en otros, métodos para desacoplar dichos bucles, pero a veces, dichos criterios también pueden conducir a un mal desempeño. Por lo tanto, se necesita un nuevo criterio para el emparejamiento de bucles para una mejora en el rendimiento de los procesos MIMO.

c. Formulación del problema

¿Cuál de los métodos de sintonización PID, el clásico o por optimización convexa mediante LMI, alcanzará un menor tiempo de establecimiento en una planta de primer orden MIMO 2X2?

1.2 Objetivos de la investigación

a. Objetivo General

- Determinar cuál de los dos métodos de sintonización PID presenta un menor tiempo de establecimiento en una planta de primer orden MIMO 2X2.

b. Objetivos Específicos

- Describir el método de sintonización PID clásico.
- Describir el método de sintonización PID por optimización convexa mediante LMI.
- Medir el tiempo de establecimiento con el método de sintonización PID clásico en una planta de primer orden MIMO 2X2.
- Medir el tiempo de establecimiento con el método de sintonización PID por optimización convexa mediante LMI en una planta de primer orden MIMO 2X2.
- Comparar ambos tiempos de establecimiento.

1.3 Justificación del Estudio

La presente investigación estará destinada a determinar cuál de los dos métodos de sintonización PID presenta un menor tiempo de establecimiento en una planta de primer orden MIMO 2x2. Se considera importante obtener el conocimiento de ello ya que permitiría una investigación más profunda de en qué procesos y/o sistemas se debe utilizar alguno de los métodos para obtener un menor tiempo de establecimiento.

II. MARCO DE REFERENCIA

2.1 Antecedentes del estudio

Para validar esta investigación, se presenta los antecedentes de diversos estudios con referencia a los temas abordados en este trabajo, encontrados en artículos de investigación y tesis de grado de universidades nacionales y/o internacionales.

(Boyd et al., 2016), en su investigación titulada “**MIMO PID tuning via iterated LMI restriction**”; se centra en formular un diseño de un controlador MIMO PID como un problema de optimización que implica desigualdades de matrices cuadráticas no convexas. Se propuso un método sencillo que sustituye las desigualdades matriciales no convexas por una restricción de desigualdad

matricial lineal, e itera hasta la convergencia. Este método puede interpretarse como una extensión matricial del procedimiento convexo-cóncavo, o como un método particular de maximización-minimización, garantizando la convergencia a un mínimo local. Si bien no se sabe si el controlador resultante es globalmente óptimo, el método funciona bien en la práctica y proporciona un método automatizado sencillo para sintonizar controladores MIMO PID.

Aporte a la investigación. Muestra y desarrolla el método de sintonización PID por optimización convexa.

(Mercader et al., 2019), en su investigación titulada “**Control PID Multivariable de una Caldera de Vapor**”; se propuso un sistema de control basado en el diseño de un controlador tipo proporcional integrador derivativo (PID) multivariable, mediante técnicas de optimización convexa. En el que se contempla el uso de más grados de libertad mediante el diseño de precompensadores para referencias y para la perturbación medible. El sistema de control propuesto alcanzó un rendimiento superior en términos de la integral del error absoluto.

Aporte a la investigación. Diseño de PID multivariable.

(Merrikh-Bayat et al., 2022), en su trabajo titulado “**Designing and tuning MIMO feedforward controllers using iterated LMI restriction**”; se ha propuesto una estructura de control feedforward MIMO y se diseña basándose en el enfoque de desigualdad de matriz lineal (LMI) para mejorar el rechazo a las perturbaciones y el seguimiento de referencia del sistema de realimentación dado. La arquitectura consiste en dos controladores feedforward MIMO, donde cada controlador puede ser diseñado independientemente usando el método propuesto.

(He & Wang, 2006), en su investigación titulada “**An Improved ILMI Method for Static Output Feedback Control With Application to Multivariable PID Control**”; se propone un algoritmo ILMI para la resolución del diseño de controlador H_∞ para SOF (realimentación de salida estática), que son aplicados a controladores PID multivariable.

Aporte a la investigación. Punto de vista diferente de algoritmo

ILMI.

2.2 Marco teórico

2.2.1 Elementos de teoría de sistemas lineales

2.2.1.1 Representaciones de sistemas

2.2.1.1.1 Transformada de Laplace

Si $f(x)$ esta definida para $t \geq 0$, entonces la integral impropia $\int_0^{\infty} K(s, t)f(t) dt$ esta definida como un límite:

$$\int_0^{\infty} K(s, t)f(t)dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b K(s, t)f(t)dt$$

Ecuación 1. Transformada de Laplace representada en límites.

(Zill, 2018) Si existe el límite, se dice que la integral existe o es convergente; si no hay limite la integral no existe y sea firma que es divergente. este límite, en general, existe solo para ciertos valores de la variable s . La elección $K(s, t) = e^{-st}$ produce una transformada integral especialmente importante.

Sea f una función definida para $t \geq 0$. Entonces se dice que la integral

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

Ecuación 2. Transformada de Laplace.

es la *transformada de Laplace* de f , siempre y cuando la integral converja.

(Ogata, 2002) El proceso inverso de encontrar la función del tiempo $f(t)$ a partir de la transformada de Laplace $F(s)$ se denomina *transformada inversa de Laplace*. La notación para la transformada inversa de Laplace es \mathcal{L}^{-1} , se encuentra a partir de $F(s)$ mediante la siguiente integral de inversión:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds$$

Ecuación 3. Transformada de Laplace representada como integral de inversión.

(Ogata, 2002) La función de transferencia de un sistema descrito por ecuaciones diferenciales lineales e invariantes en el tiempo se define como el cociente entre la transformada de Laplace de la salida (función de respuesta) y la transformada de Laplace de la entrada (función de excitación) con la suposición que sus condiciones iniciales son cero.

(Ogata, 2002) Se describe un sistema lineal e invariante en el tiempo en la siguiente ecuación diferencial:

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}\dot{y} + a_n \\ = b_0x^{(m)} + b_1x^{(m-1)} + \dots + b_{m-1}\dot{x} + b_m$$

Ecuación 4. Ecuación diferencial de un sistema lineal e invariante en el tiempo.

en donde y es la salida y x es la entrada. La función de transferencia de este sistema se obtiene tomando la transformada de Laplace de ambos miembros de la ecuación 4:

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}\{salida\}}{\mathcal{L}\{entrada\}} = \frac{Y(s)}{X(s)} \\ = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_{m-1}s + b_m}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n}$$

Ecuación 5. Función de transferencia representada de diferentes maneras.

(Ogata, 2002) A partir del concepto de función de transferencia, es posible representar la dinámica de un sistema mediante ecuaciones algebraicas en el dominio s . Si la potencia más alta de s en el denominador de la función de transferencia es igual a n , el sistema se denomina de n -ésimo orden.

2.2.1.1.2 Espacio de estados

Se define algunos conceptos pertenecientes al espacio de estados:

a) Estado

(Ogata, 2002) El estado de un sistema dinámico

es el conjunto más pequeño de variables (denominadas *variables de estado*) de modo que el conocimiento de estas variables en $t = t_0$, junto con el conocimiento de la entrada para $t \geq t_0$, determina por completo el comportamiento del sistema para cualquier tiempo $t \geq t_0$.

b) Variable de estado

(Ogata, 2002) Las variables de estado de un sistema dinámico son las que forman el conjunto más pequeño de variables que determinan el estado del sistema dinámico. Si se necesitan al menos n variables x_1, x_2, \dots, x_n para describir el comportamiento de un sistema dinámico (por lo cual una vez que se proporciona la entrada para $t \geq t_0$ y se especifica el estado inicial en $t = t_0$, el estado futuro del sistema se determina por completo), tales n variables son un conjunto de variables de estado.

(Ogata, 2002) Las variables de estado son las que no representan cantidades físicas y aquellas que no son medibles ni observables. La libertad de elección de las variables de estado es una enorme ventaja en el método de espacio de estados. Sin embargo, en la práctica es conveniente elegir cantidades que se midan con facilidad para las variables de estado, si es posible, debido a que las leyes del control óptimo requerirán la realimentación de todas las variables de estado con una ponderación conveniente.

c) Vector de estado

(Ogata, 2002) Si se necesitan n variables de estado para describir por completo el comportamiento de un sistema determinado, estas n variables de estado se consideran los n componentes de un vector x . Tal vector se

denomina vector de estado. Por tanto, un vector de estado es aquel que determina de manera única el estado del sistema $x(t)$ para cualquier tiempo $t \geq t_0$, una vez que se obtiene el estado en $t = t_0$ y se especifica la entrada $u(t)$ para $t \geq t_0$.

d) Espacio de estados

(Ogata, 2002) El espacio de n dimensiones cuyos ejes de coordenadas están formados por el eje x_1 , el eje x_2, \dots , el eje x_n , se denomina espacio de estados. Cualquier estado puede representarse mediante un punto en el espacio de esta.

e) Ecuaciones en el espacio de estados

(Ogata, 2002) Para analizar un sistema en el espacio de estados, existen tres tipos de variables involucrados en el modelado de sistemas dinámicos: variables de entrada, variables de salida y variables de estado.

(Ogata, 2002) El sistema dinámico debe incorporar elementos que memoricen los valores de la entrada para $t \geq t_1$. Dado que los integradores de un sistema de control en tiempo continuo funcionan como dispositivos de memoria, las salidas de tales integradores se consideran las variables que definen el estado interno del sistema dinámico. Por ende, las salidas de los integradores funcionan como variables de estado. La cantidad de variables de estado necesarias para definir completamente la dinámica del sistema es igual a la cantidad de integradores que contiene el sistema.

(Ogata, 2002) Suponga que un sistema de entradas y salidas múltiples contiene n integradores. También suponga que existen r entradas $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$, y m salidas

$y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$. Define n salidas de los integradores como variables de estado: $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$. A continuación, el sistema se describe mediante

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)\end{aligned}$$

Ecuación 6. Sistema de n entradas múltiples.

Las salidas $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$ del sistema se obtienen mediante

$$\begin{aligned}y_1(t) &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ y_2(t) &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ &\vdots \\ y_m(t) &= g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)\end{aligned}$$

Ecuación 7. Sistema de n salidas múltiples

Si definimos

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, & \mathbf{y}(t) &= \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}, & \mathbf{u}(t) &= \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) &= \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) &= \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

las ecuaciones 6 y 7 se convierten en

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

Ecuación 8. Ecuación de estado de un sistema lineal.

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

Ecuación 9. Salida del sistema lineal.

en donde la ecuación 8 define la ecuación de estado y la ecuación 9 define la ecuación de salida. Si las funciones vectoriales \mathbf{f} y/o \mathbf{g} involucran explícitamente el tiempo t , el sistema se denomina sistema variante con el tiempo. (Ogata, 2002)

(Ogata, 2002) Si se linealizan las ecuaciones 8 y 9 alrededor del estado de operación, ecuaciones de estado y de salida linealizada: tenemos las siguientes

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$

Ecuación 10. Ecuación de estado linealizada.

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)$$

Ecuación 11. Ecuación de salida del sistema linealizada.

en donde $\mathbf{A}(t)$ se denomina matriz de estado, $\mathbf{B}(t)$ matriz de entrada, $\mathbf{C}(t)$ matriz de salida y $\mathbf{D}(t)$ matriz de transmisión directa. (Ogata, 2002)

(Ogata, 2002) Si las funciones \mathbf{f} y/o \mathbf{g} no involucran el tiempo t explícitamente, el sistema se denomina invariante en el tiempo. En este caso, las ecuaciones 12 y 13 se simplifican a

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

Ecuación 12. Ecuación de estado de un sistema invariable en el tiempo.

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Ecuación 13. Ecuación de salida de un sistema invariable en el tiempo.

La representación del diagrama de bloques de las ecuaciones 14 y 15 es mostrado en la Figura 1.

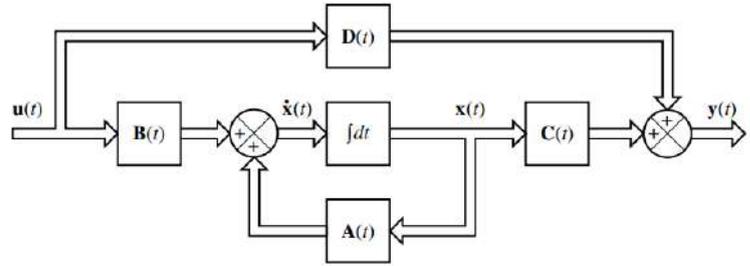


Figura 1. Diagrama de bloques de un sistema invariante en el tiempo en representación de espacio de estados. Fuente: Ogata, K. (2002). *Modern Control Engineering (4.a ed.)*. Prentice Hall. p. 73.

2.2.1.1.3 Correlación entre funciones de transferencia y ecuaciones en el espacio de estado

(Ogata, 2002) Consideremos el sistema cuya función de transferencia se obtiene mediante

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)$$

Ecuación 14. Función de transferencia de sistema en el dominio s.

Este sistema se representa en el espacio de estados mediante las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A\vec{x} + B\vec{u} \\ y &= C\vec{x} + D\vec{u} \end{aligned}$$

Ecuación 15. Sistema representado en el espacio de estados.

donde x es el vector de estado, u es la entrada, y y es la salida. La transformada de Laplace del sistema en la ecuación 17 se obtiene mediante

$$sX(s) - X(0) = AX(s) + BU(s)$$

Ecuación 16. Ecuación de estado de un sistema en el dominio s.

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

Ecuación 17. Ecuación de salida de un sistema en el dominio s.

(Ogata, 2002) Antes se definió a la función de

transferencia como el cociente entre la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada, cuando las condiciones iniciales son cero, suponemos que $X(0)$ en la ecuación 18 es cero. Por tanto, tenemos que

$$sX(s) = AX(s) + BU(s)$$

o bien

$$(sI - A)X(s) = BU(s)$$

Pre multiplicando por $(sI - A)^{-1}$ en ambos miembros de esta última ecuación, obtenemos

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación 19, llegamos a

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s)$$

Después de comparar la ecuación anterior con la ecuación 16 vemos que

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Ecuación 18. Función de transferencia del sistema en términos de A, B, C y D.

Observe que el segundo miembro de la ecuación 4.20 contiene $(sI - A)^{-1}$. Por tanto, $G(s)$ se escribe como

$$G(s) = \frac{Q(s)}{|sI - A|}$$

en donde $Q(s)$ es un polinomio en s . Por tanto, $|sI - A|$ es igual al polinomio característico de $G(s)$. En otras palabras, los valores específicos de A son idénticos a los polos de $G(s)$. (Ogata, 2002)

2.2.1.2 Polos

(Skogestad & Postlethwaite, 2005) Por simplicidad, se define a los polos del sistema en términos de los valores propios de la matriz A del espacio de estados. En términos más generales, los polos $G(s)$ pueden definirse de forma un tanto vaga como los valores finitos $s = p$ donde $G(p)$ tiene una singularidad (“es infinito”).

Los polos p_i de un sistema con descripción del espacio de

estados como la ecuación 17 son los valores propios $\lambda_i(A), i = 1, \dots, n$ de la matriz A . El polo o polinomio característico $\phi(s)$ es definido como $\phi(s) = \det(sI - A) = \prod_{i=1}^n (s - p_i)$. Así pues, los polos son las raíces de la ecuación característica

$$\phi(s) = \det(sI - A) = 0$$

Ecuación 19. Fórmula característica de polos de un sistema.

- Polos y estabilidad

Un sistema dinámico lineal $\dot{x} = A\vec{x} + B\vec{u}$ es estable si y solo si todos los polos están en el semiplano izquierdo abierto (LHP), es decir, $Re\{\lambda_i(A)\} < 0, \forall i$. Una matriz A con tal propiedad se dice que es “estable” o de Hurwitz.

- Polos desde espacio de estados

Los polos suelen obtenerse numéricamente calculando los valores propios de la matriz A . Para obtener el menor número de polos debemos utilizar una realización mínima del sistema.

- Polos desde funciones de transferencia

(Skogestad & Postlethwaite, 2005) El teorema de MacFarlane y Karcnias nos permite obtener los polos de forma correcta de la matriz de la función de transferencia $G(s)$ y también es útil para cálculos manuales. Se obtiene una ventaja al proporcionar los polos correspondientes a una realización mínima del sistema.

Dicho teorema es como sigue: “El polinomio de polos $\phi(s)$ correspondiente a una realización mínima de un sistema con función de transferencia $G(s)$, es el mínimo común denominador de todos los menores no idénticamente nulos de todos los órdenes de $G(s)$ ”.

Un menor de una matriz es el determinante de la matriz que se obtiene suprimiendo determinadas filas y/o columnas de la matriz.

2.2.1.3 Ceros

(Skogestad & Postlethwaite, 2005) Según MacFarlane y Karcnias, z_i es un cero de $G(s)$ si el rango de $G(z_i)$ es menor que el rango normal de $G(s)$. El polinomio cero se define como $z(s) = \prod_{i=1}^{n_z} (s - z_i)$ donde n_z es el numero de ceros finitos de $G(s)$.

- Ceros desde el espacio de estados

(Skogestad & Postlethwaite, 2005) Los ceros suelen calcularse a partir de una descripción del espacio de estados del sistema. Obsérvese en primer lugar que las ecuaciones del espacio de estado de un sistema pueden escribirse como

$$P(s) \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}, \quad P(s) = \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Ecuación 20. Ecuaciones en el espacio de estados representadas por matrices.

Los ceros son entonces los valores $s = z$ para los que la matriz del sistema polinómico, $P(s)$, pierde rango, dando como resultado una salida cero para una entrada distinta de cero. Numéricamente, los ceros se encuentran como soluciones no triviales (con $u_z \neq 0$ y $x_z \neq 0$) del siguiente problema

$$(zI_g - M) \begin{bmatrix} x_z \\ u_z \end{bmatrix} = 0$$

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}; \quad I_g = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ecuación 21. Fórmula para calcular ceros en el espacio de estados.

Esto se resuelve como un problema de valores propios generalizado - en el problema de valores

propios convencional tenemos $I_g = I$. Nótese que normalmente obtenemos ceros adicionales si la realización no es mínima.

- Ceros desde funciones de transferencia (Skogestad & Postlethwaite, 2005) El teorema de MacFarlane y Karcanias (1976) nos dice: “El polinomio cero $z(s)$, correspondiente a una realización mínima del sistema, es el máximo común divisor de todos los numeradores de todos los menores de orden- r de $G(s)$, donde r es el rango normal de $G(s)$, siempre que estos menores se hayan ajustado de forma que tengan como denominador el polinomio de polos $\phi(s)$ ”.

2.2.1.4 Controlabilidad del estado y observabilidad del estado

2.2.1.4.1 Controlabilidad del estado

(Skogestad & Postlethwaite, 2005) El sistema dinámico $\dot{x} = A\vec{x} + B\vec{u}$ o equivalentemente el par $(A; B)$, se dice que es controlable por el estado si, para cualquier estado inicial $x(0) = x_0$, cualquier tiempo $t_1 > 0$ y cualquier estado final x_1 , existe una entrada $u(t)$ tal que $x(t_1) = x_1$. En caso contrario, se dice que el sistema no es controlable por el estado.

Dado un sistema dinámico lineal de la forma $\dot{x} = A\vec{x} + B\vec{u}$ con la condición inicial $x(t_0)$ y una entrada $u(t)$, la respuesta dinámica del sistema $x(t)$ para $t \geq t_0$ pueden ser determinado desde

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Ecuación 22. Respuesta para un sistema dinámico de la forma $\dot{x} = A\vec{x} + B\vec{u}$.

donde la matriz exponencial es $e^{A(t)} = I + \sum_{k=1}^{\infty} (At)^k/k!$.

Desde la ecuación 24 uno puede verificar que

una entrada concreta que consigue $x(t_1) = x_1$ es

$$u(t) = -B^T e^{A^T(t_1-t)} W_c(t_1)^{-1} (e^{At_1} x_0 - x_1)$$

donde $W_c(t)$ es la matriz Gramiana en el tiempo t ,

$$W_c(t) \triangleq \int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau$$

Ecuación 23. Matriz gramiana de controlabilidad en el tiempo t

Por lo tanto, el sistema $(A; B)$ es controlable por el estado si y sólo si la matriz Gramiana $W_c(t)$ tiene rango completo (y, por tanto, es definida positiva) para cualquier $t > 0$. Para un sistema estable (A es estable) sólo tenemos que considerar $P \triangleq W_c(\infty)$, es decir, el par $(A; B)$ es controlable por el estado si y sólo si el Gramiana de controlabilidad

$$P \triangleq \int_0^{\infty} e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau$$

Ecuación 24. Gramiana de controlabilidad.

es positiva definida ($P > 0$) y, por tanto, tiene rango completo n . P también puede obtenerse como la solución de la ecuación de Lyapunov

$$AP + PA^T = -BB^T$$

Ecuación 25. Solucion para la gramiana de controlabilidad mediante la ecuación de Lyapunov.

2.2.1.4.2 Observabilidad de estado

(Skogestad & Postlethwaite, 2005) El sistema dinámico $\dot{x} = A\vec{x} + B\vec{u}$, $y = C\vec{x} + D\vec{u}$ (o por el par $(A; C)$) se dice que es observable por el estado si, para cualquier tiempo $t_1 > 0$, el estado inicial $x(0) = x_0$ puede determinarse a

partir de la historia temporal de la entrada $u(t)$ y la salida $y(t)$ en el intervalo $[0; t_1]$. En caso contrario, se dice que el sistema, o $(A; C)$, es no observable.

Tenemos que el sistema $(A; C)$ es observable si y solo si la matriz Gramiana

$$Q = W_o(t) \triangleq \int_0^t e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau$$

Ecuación 26. Matriz gramiana de observabilidad.

que debe tener rango completo n (y por tanto ser definida positiva) para que el sistema sea observable por el estado. Q también puede encontrarse como solución de la siguiente ecuación de Lyapunov

$$A^T Q + Q A = -C^T C$$

Ecuación 27. Solución para la gramiana de observabilidad mediante la ecuación de Lyapunov.

2.2.2 Control multivariable

2.2.2.1 Introducción

(Hammond, 1963) La mayoría de los sistemas físicos con los que tratará el ingeniero de control, las plantas tendrán más de una entrada o salida.

Fogel discute un control automático multivariable para aviones de alta velocidad. Frazer revisa varios sistemas multivariables que aparecen en aviones y estructuras vibratorias. Un proceso de mezcla química podría tener entradas como el flujo de varias materias primas, velocidad de mezcla, temperatura y presión, y salidas como la mezcla de agregados, viscosidad y temperatura. Otras plantas multivariables son el guiado y control de vehículos espaciales laminadores de una planta siderúrgica, y

los sistemas de distribución de energía eléctrica.

(Skogestad & Postlethwaite, 2005) Consideramos una planta multi-entrada multi-salida (MIMO, por sus siglas en inglés), con m inputs and l salidas. Por lo tanto, el modelo básico de función de transferencia es $y(s) = G(s).u(s)$, donde y es un vector $l \times 1$, u es un vector $1 \times m$ y $G(s)$ es una matriz de función de transferencia con dimensiones $l \times m$.

Si realizamos un cambio en la primera entrada, u_1 , generalmente afectara a todas las salidas, y_1, y_2, \dots, y_l , es decir, existe interacción entre las entradas y salidas.

Una planta no interactiva resultaría si u_1 solo afectara y_1 , u_2 solo afectara y_2 y así sucesivamente.

(Albertos & Sala, 2003) La magnitud de todos estos efectos de acoplamiento depende en gran medida de las unidades de medida. Por lo tanto, siempre es necesario un escalado adecuado para que todos los errores tengan un significado comparable. En algunos casos, las variables manipuladas y las mediciones seleccionadas no parecen convenientes a efectos de control y los cambios en el número y/o posición de los actuadores y sensores. En un problema de control multivariable, el emparejamiento de las variables de entrada/salida, el efecto de las interacciones y las opciones para desacoplar diferentes objetivos de control son cuestiones que deben considerarse en las primeras fases del diseño. La finalidad del sistema de control puede ser múltiple. Una de las características más importantes de un sistema de control multivariable es su capacidad para obtener la no interacción entre las entradas. Si se desea un cambio en una salida en particular, es mucho mejor si solo se cambia una variable de entrada en lugar de varias. Si se desea cualquier otra

relación entre las entradas y salidas que la que presenta la planta, este tipo de sistema permitirá su realización. Es posible que se desee optimizar alguna función específica del sistema. El control óptimo puede adoptar la forma de minimizar el error entre las salidas y un conjunto de salidas deseadas, minimizar el efecto de la desviación de los parámetros de la planta, minimizar el tiempo de respuesta o minimizar el tiempo de respuesta o minimizar el coste de operación cuando el sistema cambia de un punto en un espacio n dimensional a otro punto en el mismo espacio. Se han desarrollado técnicas de diseño para todos estos tipos de sistemas.

2.2.2.2 Control retroalimentado

(Ogata, 2002) El control retroalimentado se refiere a una operación que, en presencia de perturbaciones, tiende a reducir la diferencia entre la salida de un sistema y alguna entrada de referencia y lo continúa haciendo con base en esta diferencia. Aquí solo se especifican con este término las perturbaciones impredecibles, dado que las perturbaciones predecibles o conocidas siempre pueden compensarse dentro del sistema.

(Ogata, 2002) En un sistema de control en lazo cerrado, se alimenta al controlador la señal de entrada y la señal de realimentación (que puede ser la señal de salida misma o una función de la señal de salida y sus derivadas y/o integrales), a fin de reducir el error y llevar la salida del sistema a un valor conveniente.

(Skogestad & Postlethwaite, 2005) Las siguientes tres reglas son muy usadas cuando se evalúan funciones de transferencia para sistemas multivariables.

- Regla de cascada

Para la interconexión en cascada (serie) de G_1 y G_2 en la Figura 2, la matriz de función de transferencia es $G = G_2G_1$.

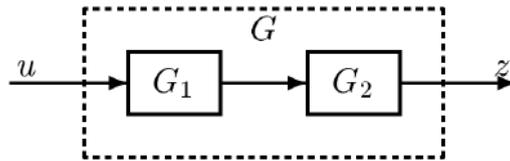


Figura 2. Sistema en cascada. Fuente: Skogestad, S., & Postlethwaite, I. (2005). *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design* (2.a ed.). p.64.

- Regla de realimentación

Con referencia al sistema realimentado positivamente en la Figura 3, tenemos que $v = (I - L)^{-1}u$ donde $L = G_2G_1$ es la función de transferencia alrededor del bucle.

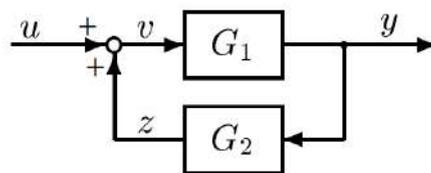


Figura 3. Sistema en retroalimentación. Skogestad, S., & Postlethwaite, I. (2005). *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design* (2.a ed.). p.64.

- Regla de avance

Para matrices de dimensiones apropiadas

$$G_1(I - G_2G_1)^{-1} = (I - G_1G_2)^{-1}G_1$$

Ecuación 28. Regla de avance.

La ecuación es verificada por pre-multiplicar ambos lados por $(I - G_1G_2)$ y pos-multiplicar ambos lados por $(I - G_2G_1)$.

2.2.2.2.1 Limitaciones fundamentales

Es pertinente preguntarnos porque se debería usar control retroalimentado en lugar de usar un simple control de avance (*feedforward*). Un perfecto controlador de avance se obtiene

removiendo la señal de retroalimentación y usando un controlador

$$F(s) = P(s)^{-1}$$

Ecuación 29. Controlador feedforward.

Asumimos que la planta y el controlador son ambos estables y que todas las perturbaciones son conocidas. Sin embargo, P nunca es un modelo exacto, y las perturbaciones no son conocidas exactamente.

Es importante conocer las limitaciones fundamentales que se encuentran en un problema de diseño:

- a) Incertidumbre de las perturbaciones
- b) Incertidumbre del proceso
- c) Dinámica del proceso
- d) No linealidades

(Aström & Hägglund, 2009) La dinámica del proceso es, a menudo, un factor limitador. Son factores relevantes los retardos de tiempo y los polos y ceros en el semiplano derecho. Es importante conocer estas limitaciones. Los retardos de tiempo son el factor limitante más común para control PID. Resulta intuitivamente claro que es imposible tener un control exigente de un sistema con un retardo de tiempo.

2.2.2.2.2 Funciones de transferencia – The gang of six – La banda de los seis

(Bernhardsson & Åström, s. f.) El bucle de retroalimentación de la figura 4 esta influenciado por tres señales externas: la referencia r , la perturbación de carga d y el ruido de medición n . Hay al menos 3 señales: x , y y u que son de gran interés para el control. Esto significa

que hay nueve relaciones entre las señales de entrada y salidas. Debido a que el sistema es lineal, estas relaciones pueden ser expresadas en términos de funciones de transferencia. Sean X, Y, U, D, N, R las transformadas de Laplace de x, y, u, d, n, r , respectivamente. Las siguientes relaciones son obtenidas para el diagrama de bloques de la figura 4

$$X = \frac{P}{I + PC}D - \frac{PC}{I + PC}N + \frac{PCF}{I + PC}R$$

$$Y = \frac{P}{I + PC}D + \frac{1}{I + PC}N + \frac{PCF}{I + PC}R$$

$$U = -\frac{PC}{I + PC}D - \frac{C}{I + PC}N + \frac{CF}{I + PC}R$$

Ecuación 30. Funciones transferencia de las señales internas X, Y y U .

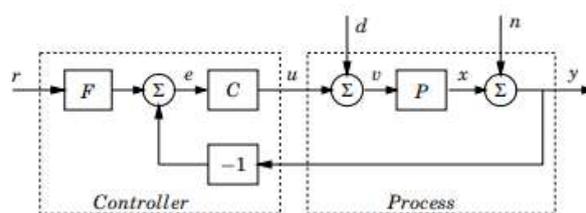


Figura 4. Diagrama de bloque de un bucle de retroalimentación básico.

Se puede observar que varias funciones de transferencia son las mismas y que están relacionadas entre sí por el siguiente conjunto de seis funciones de transferencia las cuales son denominadas *The Gang of Six*.

$$\begin{array}{ccc} \frac{PCF}{I + PC} & \frac{PC}{I + PC} & \frac{P}{I + PC} \\ \frac{CF}{I + PC} & \frac{C}{I + PC} & \frac{1}{I + PC} \end{array}$$

Ecuación 31. Funciones de sensibilidad – *The Gang of Six*.

(Bernhardsson & Åström, s. f.) Las funciones de transferencia en la primera columna nos

dan la respuesta de la variable del proceso y

$$T = \frac{L}{I + L} \quad \text{Función sensibilidad complementaria}$$

$$PS = \frac{P}{I + L} \quad \text{Función sensibilidad a perturbaciones de carga}$$

$$CS = \frac{C}{I + L} \quad \text{Función sensibilidad al ruido}$$

$$S = \frac{1}{I + L} \quad \text{Función sensibilidad}$$

la señal de control al punto de consigna o setpoint. La segunda columna nos da las mismas señales, pero para el caso de retroalimentación error puro cuando $F = 1$. La función $P/(I + PC)$ en la tercera columna nos dice como la variable de proceso reacciona a la perturbación de carga, y la función $C/(I + PC)$ nos da la respuesta de la señal de control con respecto al ruido medido.

Nos damos cuenta que solo se necesitan cuatro funciones de transferencia para describir cómo reacciona el sistema a las perturbaciones de carga y el ruido medido y que dos funciones de transferencia adicionales son requeridas para describir como el responde el sistema a cambios en la consigna o setpoint.

El caso especial en donde $F = 1$, todas las acciones de control están basadas en la retroalimentación solo desde el error. En este caso el sistema es caracterizado por cuatro funciones de transferencia donde la ganancia en bucle L es la función de transferencia del lazo definida por:

$$L = PC$$

Ecuación 32. Función de transferencia de lazo abierto.

Para describir como el sistema reacciona frente a las perturbaciones de carga y al ruido de medida. Estas funciones de transferencia las denominaremos *la banda de los cuatro*.

(Bernhardsson & Åström, s. f.) El caso especial cuando $F = 1$ se llama un sistema con realimentación del error (puro). En este caso, todas las acciones de control se basan solo en la realimentación del error, que queda caracterizado completamente por la banda de los cuatro.

Con frecuencia estamos interesados en la magnitud de las funciones de transferencia dadas por ecuación 33. Es importante tener en cuenta que las funciones S y T son adimensionales, pero las funciones de transferencia PS y CS no lo son. Para objetivos prácticos es por lo tanto importante normalizar señales, por ejemplo, escalando las entradas y salidas del proceso en el intervalo 0 a 1 o -1 a 1.

2.2.2.2.3 Las funciones de sensibilidad

(Bernhardsson & Åström, s. f.) Dos de las funciones de transferencia ecuación 33 son de interés particular, la función de sensibilidad S y la función de sensibilidad complementaria T . Las funciones de sensibilidad están únicamente dadas por la función de transferencia del lazo y tiene la propiedad de $S + T = 1$. Las funciones de transferencias reflejan muchas propiedades interesantes del sistema en lazo cerrado, particularmente la robustez frente a variaciones del proceso.

- a) Pequeñas variaciones del proceso – La función de sensibilidad

Se sigue que la función de transferencia desde el punto de consigna a la variable del proceso es

$$G_{xy_{sp}} = G_{yy_{sp}} = \frac{PCF}{1 + PC}$$

Ecuación 33. Función de transferencia desde el punto de consigna a la variable de proceso.

Considérese $G_{xy_{sp}}$, como una función de la función de transferencia del proceso P . Diferenciando con respecto a P se deduce

$$\begin{aligned} \frac{dG_{xy_{sp}}}{dP} &= \frac{CF}{1 + PC} - \frac{PC^2F}{(1 + PC)^2} = \frac{CF}{(1 + PC)^2} \\ &= \frac{1}{1 + PC} \frac{CF}{1 + PC} \end{aligned}$$

De donde,

$$\frac{dG_{xy_{sp}}}{dP} = \frac{1}{1 + PC} \frac{dP}{P} = S \frac{dP}{P}$$

Ecuación 34. Variación relativa en la función de transferencia G .

(Bernhardsson & Åström, s. f.) Obsérvese que la cantidad dG/G se pueden interpretar como la variación relativa en la función de transferencia G . La ecuación 35 implica así que el error relativo en la función de transferencia en lazo cerrado $G_{yy_{sp}}$ es igual al producto de la función de sensibilidad por el error relativo en el proceso. Para frecuencias donde la función de sensibilidad es pequeña se sigue así que el sistema en lazo cerrado es muy insensible a las variaciones en el proceso. Este es realmente uno de los motivos clave para usar realimentación. La ecuación 36 es una de las razones de por qué S se llama función de sensibilidad.

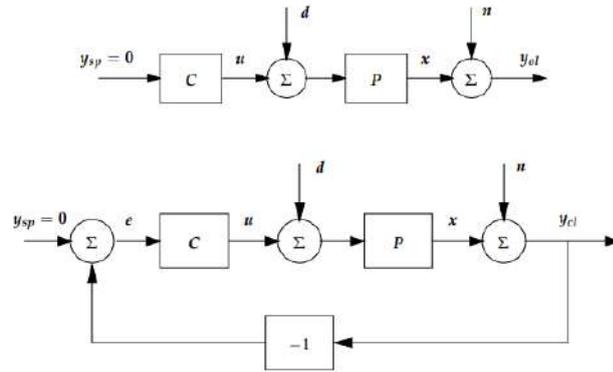


Figura 5. Diagrama de bloque de sistemas en lazo abierto y cerrado sujetos a las mismas perturbaciones.

b) Atenuación y perturbación

(Aström & Hägglund, 2009) Una cuestión fundamental es en cuánto se ven influenciadas por la realimentación las fluctuaciones en la variable del proceso. Considérese la situación mostrada en la *Figura 5* donde la misma perturbación de carga actúa sobre un proceso P en lazo abierto y sobre el proceso P en lazo cerrado con el controlador C . Sea y_{ol} la salida del sistema en lazo abierto e y_{cl} la salida del sistema en lazo cerrado. Tenemos la siguiente relación entre las transformadas de Laplace de las señales,

$$\frac{Y_{cl}(s)}{Y_{ol}(s)} = \frac{1}{1 + P(s)C(s)} = S(s)$$

Ecuación 35. Relación entre la salida del sistema en lazo cerrado y lazo abierto.

(Aström & Hägglund, 2009) Perturbaciones con frecuencias ω tal que $|S(i\omega)| < 1$ se atenúan así por realimentación, pero perturbaciones tales que $|S(i\omega)| > 1$ se amplifican por la realimentación. Un diagrama de la magnitud de S nos dice inmediatamente el efecto de la realimentación.

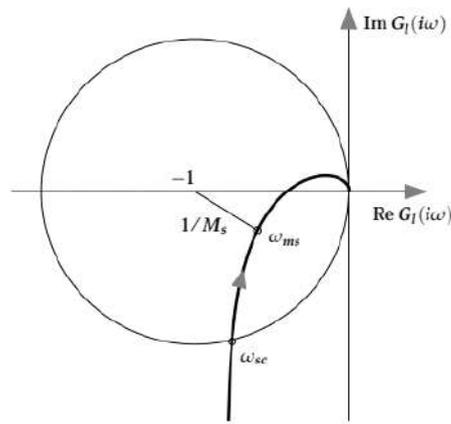


Figura 6. Diagrama de Nyquist de la función de transferencia del lazo que muestra la interpretación grafica de la sensibilidad máxima.

Como la sensibilidad sólo depende de la función de transferencia del lazo se puede visualizar gráficamente en el diagrama de Nyquist de dicha función de transferencia. (Aström & Hägglund, 2009) Esto se ilustra en la Figura 6. El número complejo $1 + G_l(i\omega)$ se puede representar en el diagrama de Nyquist como el vector que va desde el punto -1 al punto $G_l(i\omega)$. La sensibilidad es así menor que uno para todos los puntos fuera del círculo de radio 1 y centro en -1 . Las perturbaciones de estas frecuencias se atenúan por la realimentación. La frecuencia más baja donde la función de sensibilidad tiene magnitud 1 se llama la frecuencia de cruce de sensibilidad ω_{sc} . El valor

$$M_s = \max_{\omega} |S(i\omega)| = \max_{\omega} \left| \frac{1}{1 + P(i\omega)C(i\omega)} \right|$$

$$= \max_{\omega} \left| \frac{1}{1 + G_l(i\omega)} \right|,$$

Ecuación 36. Sensibilidad máxima en frecuencia de cruce de sensibilidad.

que se llama sensibilidad máxima, da el peor caso de amplificación de las perturbaciones.

(Aström & Hägglund, 2009) La sensibilidad no se

puede hacer arbitrariamente pequeña. La siguiente relación se mantiene bajo condiciones razonablemente generales para sistemas estables

$$\int_0^{\infty} \log |S(i\omega)| d\omega = 0$$

Ecuación 37. Integral de Bode.

(Aström & Hägglund, 2009) Esta relación tan importante se llama integral de Bode. Dice que si la sensibilidad se reduce para una frecuencia aumenta en otra frecuencia. La retroalimentación puede así redistribuir la atenuación de las perturbaciones para diferentes frecuencias, pero no puede reducir el efecto de las perturbaciones para todas las frecuencias.

c) Márgenes de estabilidad y máxima sensibilidad

(Aström & Hägglund, 2009) Obsérvese que $|1 + G_l(i\omega)|$ es la distancia desde un punto del diagrama de Nyquist de la función de transferencia del lazo al punto -1 . Ver la Figura 6. La distancia más corta desde el diagrama de Nyquist de la función de transferencia del lazo al punto crítico -1 es así $1/M_s$. La máxima sensibilidad puede así servir también como un margen de estabilidad. Un requisito sobre M_s da las siguientes acotaciones para los márgenes de ganancia y de fase

$$g_m \geq \frac{M_s}{M_s - 1}$$

$$\varphi_m \geq 2 \sin^{-1} \left(\frac{1}{2M_s} \right)$$

Ecuación 38. Acotaciones para márgenes de ganancia y fase.

2.2.2.2.4 Cuantificando los requisitos

(Aström & Hägglund, 2009) Para cuantificar los requisitos es necesario tener una clara comprensión del objetivo primario del control.

En general, se tiene que considerar

- Atenuación de la perturbación de carga
- Respuesta del ruido de medida
- Robustez frente a incertidumbre del proceso
- Respuesta al punto de consigna

(Aström & Hägglund, 2009) El énfasis sobre los diferentes factores depende del problema de control particular. La robustez es importante para todas las aplicaciones. El seguimiento del punto de consigna es el mayor problema en el control de movimiento, donde se desea que el sistema siga a determinadas trayectorias. En control de procesos, la mayor parte del tiempo el punto de consigna se mantiene normalmente constante; comúnmente los cambios se hacen sólo cuando se altera la producción. El rechazo de perturbaciones de carga es en realidad el tema clave en control de procesos. Hay también situaciones donde el objetivo del control no es mantener las variables del proceso en valores especificados. Un ejemplo típico es el control de nivel en tanques de igualación. La razón para utilizar estos tanques es suavizar las variaciones de caudal. En tal caso el nivel del tanque debería fluctuar dentro de ciertos límites. Una buena estrategia es no realizar ninguna acción de control mientras el nivel del tanque permanece dentro de ciertos límites y sólo aplicar control cuando el nivel está próximo a los límites. Esto se llama control promedio o control por tanque de compensación.

(Aström & Hägglund, 2009) La conducta lineal

del sistema está completamente determinada por la Banda de los Seis (sección 4.3). Despreciando la respuesta al punto de consigna es suficiente considerar la Banda de los Cuatro (sección 4.4). Las especificaciones se pueden expresar en términos de estas funciones de transferencias.

a) Respuesta a perturbaciones de carga

(Aström & Hägglund, 2009) Una estimación de la efectividad de un sistema de control para rechazar perturbaciones está dada por ecuación 24, que compara las salidas de un sistema en lazo abierto y en lazo cerrado cuando las perturbaciones son las mismas. El análisis muestra que se atenúan por la realimentación las perturbaciones con frecuencias menores que la frecuencia de cruce de sensibilidad ω_{sc} y que la amplificación más grande de las perturbaciones es la sensibilidad máxima M_s .

Las perturbaciones de carga están a menudo dominadas por las bajas frecuencias. Las señales en escalón son por lo tanto usadas como perturbaciones prototipos. Las perturbaciones pueden entrar al sistema de muchas formas diferentes. Si nada se conoce, con frecuencia se supone que las perturbaciones entran en la entrada del proceso. La respuesta de la variable de proceso viene entonces dada por la función de transferencia

$$G_{xd} = \frac{P}{1 + PC} = PS = \frac{T}{C}.$$

Ecuación 39. Función de transferencia representada por la sensibilidad complementaria.

Como las perturbaciones de carga generalmente tienen bajas frecuencias es natural que el criterio realce la conducta de la función de transferencia en bajas frecuencias. El filtrado de la señal de medida

tiene sólo un efecto marginal sobre la atenuación de las perturbaciones de carga porque el filtro sólo atenúa las altas frecuencias. Para un sistema con $P(0) = 0$ y un controlador con acción integral la ganancia del controlador tiende a infinito para bajas frecuencias, y tenemos la siguiente aproximación para pequeños s ;

$$G_{xd} = \frac{T}{C} \approx \frac{1}{C} \approx \frac{s}{k_i}.$$

Ecuación 40. Aproximación de perturbaciones de carga en bajas frecuencias (bajos s).

(Aström & Hägglund, 2009) Puesto que las perturbaciones de carga normalmente tienen bajas frecuencias esta ecuación implica que la ganancia integral k_i es una buena medida del rechazo a las perturbaciones de carga.

b) Respuesta al ruido de medida

(Aström & Hägglund, 2009) Una consecuencia inevitable de usar realimentación es que el ruido de medida se realimenta en el sistema. El ruido de medida, que típicamente tiene altas frecuencias, genera acciones de control no deseables y variaciones en la variable del proceso. Las variaciones rápidas en la variable de control son perjudiciales porque originan roturas en válvulas y motores e incluso saturan al actuador. Es importante mantener estas variaciones en un nivel razonable. Un requisito típico es que las variaciones sólo sean una fracción del rango de la señal de control. Las variaciones se pueden ver influidas por el filtraje y por un diseño adecuado de las propiedades de alta frecuencia del controlador.

(Aström & Hägglund, 2009) Los efectos del ruido de medida son así captados por la función de

transferencia del ruido de medida a la señal de control

$$G_{un} = \frac{C}{1 + PC} = CS = \frac{T}{P}$$

Ecuación 41. Función de transferencia del ruido de medida a la señal de control.

Para bajas frecuencias (pequeños s) la función de transferencia se aproxima a $1/P(0)$ y para altas frecuencias (grandes s) tenemos aproximadamente

$$G_{un} \approx C.$$

Ecuación 42. Aproximación de ruido de medida para altas frecuencias (grandes s).

2.2.2.3 Control PID

(Aström & Hägglund, 2009) El Control Proporcional, Integral y Derivativo, o como se conoce comúnmente PID, es un método que está diseñado para que la o las variables de salida en algún determinado proceso lleguen al punto que se desea. Es muy interesante indicar que más de la mitad de los controladores industriales que se usan hoy en día utilizan esquemas de control PID o PID modificado.

(Aström & Hägglund, 2009) Una de sus principales ventajas, y lo que lo lleva a ser el más usado en la industria, es que se puede utilizar a pesar de no conocer el modelo matemático de la planta.

Normalmente estos controles se llegan a sintonizar en planta, con los equipos en funcionamiento, esto hace que en algunos casos el control pueda ser alterado para poder lograr un control óptimo, cuando se hacen cambios ya no es un PID normal, se transforma en un PID modificado. No se detallará todos los controles modificados ya que hasta la fecha se siguen estudiando y mejorando.

(Aström & Hägglund, 2009) En este caso, la entrada

viene a ser el valor al que se espera llegar, una vez este valor ingresa a nuestro controlador ya sintonizado con los parámetros respectivos, se ejecutará una acción de salida en el controlador y este ingresará a nuestra planta, esta señal que ingresa a nuestra planta lo que busca será que el valor que nosotros ingresamos sea el mismo que sale, para que cuando se analice el error, que en este caso es la resta de entrada y salida, sea el valor de 0 o lo más próximo a este. En porcentaje de error aceptable variará dependiendo al tipo de planta, ya que algunas son más tolerantes al error que otras.

2.2.2.3.1 Acción proporcional

(Aström & Hägglund, 2009) Este parámetro, en algunos casos, se puede tomar como un tipo de control (Control Proporcional), ya que se relaciona directamente con el error, por ende, la acción de control es simplemente proporcional al error de control, en caso de que el control sea netamente proporcional la ecuación se define como:

$$u(t) = K_p e(t) + u_b$$

Ecuación 43. Controlador proporcional.

Donde $e(t)$ viene a ser el error, $u(t)$ es la señal de control y u_b vendría a ser la polarización, que muchas veces se calcula de la siguiente manera:

$$u_b = \frac{(u_{m\acute{a}x} + u_{m\acute{i}n})}{2}$$

Ecuación 44. Polarización de un controlador proporcional.

(Aström & Hägglund, 2009) En algunos casos se ajusta de manera manual para que el error

de control estacionario sea cero en el punto de consigna dado. Cabe resaltar que el parámetro K_p tiene el mismo funcionamiento que en la acción proporcional, pero ahora mostraremos una gráfica en la cual se puede observar el comportamiento de nuestro parámetro.

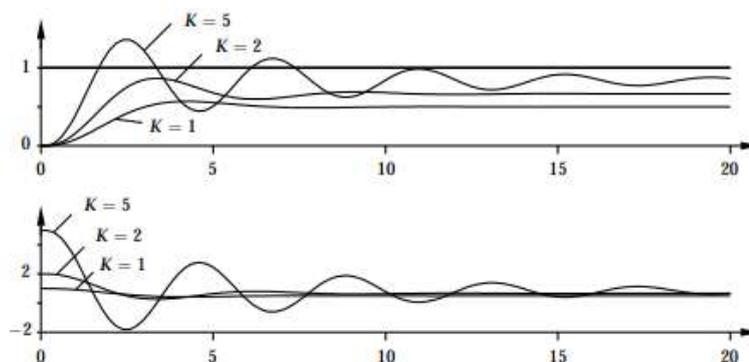


Figura 7. Simulación de un sistema en lazo cerrado con control proporcional. Aström, K., & Hägglund, T. (2009). Control PID Avanzado. p. 69

2.2.2.3.2 Acción integral

(Aström & Hägglund, 2009) La finalidad de este parámetro es asegurar que en la acción de salida del proceso coincida en el punto de consigna en estado estacionario, ya que en el control proporcional hay un error en estado estacionario, pero con la acción integral, el error positivo hará que la señal de salida sea creciente, y un error negativo hará que la señal sea decreciente. En la siguiente ecuación:

$$u_0 = K \left(e_0 + \frac{e_0}{T_i} t \right)$$

Ecuación 45. Controlador integral.

(Aström & Hägglund, 2009) Donde tenemos que u_0 es la señal de control, e_0 es el error constante. Recordemos que para el caso de

$e_0 = 0$, el error en estado estacionario es 0. Esta acción integral se puede representar como si la polarización de la acción proporcional fuera 0, ya que manda a 0 el valor de la polarización.

Esta fue realmente una de las primeras invenciones de la acción integral, o “reset automático” tal como se llamó.

En la siguiente figura se observa la acción integral como realimentación positiva en un sistema de primer orden

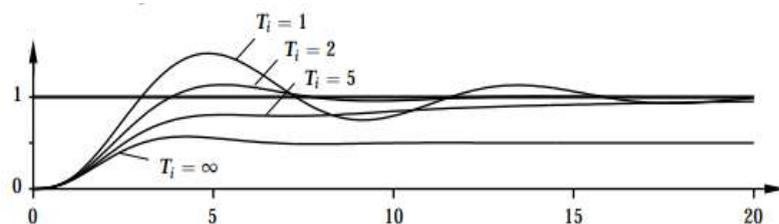


Figura 8. Simulación de un sistema en lazo cerrado con control proporcional e integral. Aström, K., & Hägglund, T. (2009). Control PID Avanzado. p.71

$$u = K \left(e + \frac{1}{T_i} \int e(\tau) d\tau \right)$$

Ecuación 46. Función de salida de un controlador PI.

2.2.2.3.3 Acción derivativa

Lo que busca la acción derivativa es mejorar la estabilidad del sistema en lazo cerrado. La inestabilidad la podemos definir con la siguiente figura

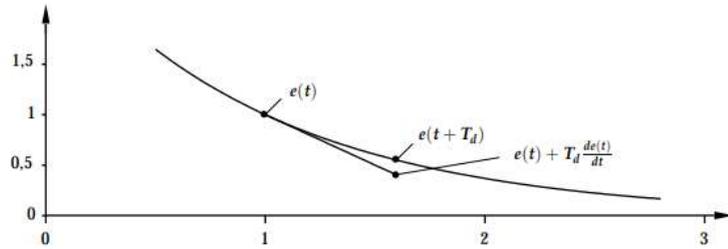


Figura 9. Interpretación de la acción derivativa como control predictivo, donde la predicción se obtiene por extrapolación lineal. Aström, K., & Hägglund, T. (2009). Control PID Avanzado. p.72

(Aström & Hägglund, 2009) La acción derivativa, en resumen, es proporcional a la derivada del error en el control y gracias a este término se puede predecir la acción del control al paso del tiempo.

Uniando las 3 acciones nos da como resultado lo siguiente

$$u = K \left(e + \frac{1}{T_i} \int e(\tau) d\tau + T_d \frac{de}{dt} \right)$$

Ecuación 47. Controlador PID ideal.

La ecuación representa un controlador idealizado, es una buena forma de entender las bases del PID, pero se deben hacer modificaciones para obtener un controlador que sea prácticamente útil.

2.3 Marco conceptual

2.3.1 Sistemas de control automático

2.3.1.1 Variable controlada

(Ogata, 2002) Normalmente, es la salida del sistema. Control significa medir el valor de la variable controlada del sistema a la cual se le aplica la señal de control al sistema para limitar la desviación del valor medido con respecto a un valor deseado.

2.3.1.2 Variable manipulada

(Ogata, 2002) Cantidad que se varía en el controlador logrando afectar al valor de la variable a controlar.

2.3.1.3 Planta

(Ogata, 2002) Una planta puede ser una parte de un equipo, tal vez un conjunto de las partes de una máquina que funcionan juntas, el propósito de la cual es ejecutar una operación particular. Podemos llamar planta a un objeto físico al cual se va a controlar (tal como un dispositivo mecánico, un horno de calefacción, un reactor químico o una nave espacial).

2.3.1.4 Proceso

(Ogata, 2002) El *Diccionario Merriam-Webster* define un proceso como una operación o un desarrollo natural progresivamente continuo, marcado por una serie de cambios graduales que se suceden uno al otro de una forma relativamente fija y que conducen a un resultado determinado; una operación artificial o voluntaria progresiva que consiste en una serie de acciones controladas sistemáticamente dirigidos hacia propósitos determinados.

2.3.1.5 Sistema

(Ogata, 2002) Un sistema es una combinación de componentes que actúan juntos y realizan un objetivo determinado, siendo este no necesariamente físico. El concepto de sistema se aplica a fenómenos abstractos y dinámicos

2.3.1.6 Perturbaciones

Una perturbación es una señal que tiende a afectar negativamente el valor de la salida de un sistema. Si la perturbación se genera dentro del sistema se denomina *interna*, en el caso contrario se le llama *externa*. (Ogata, 2002)

2.3.2 Inecuaciones de matrices lineales (LMI)

2.3.2.1 Breve historia de LMIs en la teoría de control

La historia de las LMIs en el análisis de sistemas

dinámicos se remonta hace más de 100 años. La historia comienza alrededor de 1890, cuando Aleksandr Mikhailovich Lyapunov publica su trabajo cumbre introduciendo lo que llamamos ahora teoría de Lyapunov el cual es un estudio sistemático de la expansión y contracción de las propiedades locales de movimientos de los sistemas dinámicos en torno a un atractor. Él demostró que la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t),$$

es estable, es decir, todas las trayectorias convergen a cero, si y solo si existe una matriz P positiva-definida tal que

$$A^T P + P A < 0.$$

Ecuación 48. Desigualdad de Lyapunov.

El requisito $P > 0$, $A^T P + P A < 0$ es lo que ahora llamamos una desigualdad de Lyapunov sobre P , que es una forma especial de una LMI. Lyapunov también demostró que esta primera LMI podía resolverse explícitamente. En efecto, podemos elegir cualquier $Q = Q^T > 0$ y resolver la ecuación lineal $A^T P + P A = -Q$ para la matriz P , que se garantiza que es positiva-definida si el sistema es estable. En resumen, la primera LMI utilizada para analizar la estabilidad de un sistema dinámico fue la desigualdad de Lyapunov, que puede resolverse analíticamente (resolviendo un conjunto de ecuaciones lineales).

El siguiente hito importante se produce en la década de 1940. Lur'e, Postnikov y otros en la Unión Soviética aplicaron los métodos de Lyapunov a algunos problemas prácticos específicos de la ingeniería de control, especialmente, el problema de la estabilidad de un sistema de control con una no linealidad en el actuador en donde fueron los primeros en aplicar los métodos de Lyapunov a

problemas prácticos de ingeniería de control. Las LMI resultantes se resolvían analíticamente, a mano. Por supuesto, esto limitaba su aplicación a sistemas pequeños (de segundo o tercer orden).

El siguiente gran avance se produjo a principios de los años 60, cuando Yakubovich, Popov, Kalman y otros investigadores consiguieron reducir la solución de las LMI que surgieron en el problema de Lur'e a simples criterios gráficos.

En un artículo de 1976, Horisberger y Belanger habían observado que la existencia de una función de Lyapunov cuadrática que demuestre simultáneamente la estabilidad de una colección de sistemas lineales es un problema convexo que implica LMIs.

Posteriormente, en 1988, Nesterov y Nemirovskii desarrollaron métodos de punto interior que se aplican directamente a problemas convexos que involucran LMIs.

2.3.2.2 Definición

Muchos de los problemas en teoría de sistemas lineales y en teoría de control robusto pueden ser formulados como optimizaciones convexas las cuales envuelven inecuaciones de matrices lineales.

Una LMI tiene la forma de

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0,$$

Ecuación 49. Formula general de un LMI.

donde las matrices simétricas $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ para $0 \leq i \leq m$ son dadas y la variable $x = [x_1, \dots, x_m]^T$ esta en \mathbb{R}^m . El símbolo de desigualdad en ecuación 51 significa que $F(x)$ es positiva-definida, en otras palabras, $u^T F(x) u > 0$ para todos $u \in \mathbb{R}^n$ distintos a cero. Por supuesto, la LMI es equivalente a un

conjunto de n desigualdades polinómicas, es decir, los principales menores de $F(x)$ deben ser positivos.

La LMI da lugar a dos tipos de preguntas:

- El problema de viabilidad de la LMI consiste en comprobar si existen variables reales x_1, \dots, x_m tales que se cumpla la ecuación 51.
- El problema de optimización de la LMI consiste en minimizar una función de coste $c(x) = c_1x_1 + \dots + c_mx_m$ sobre todos los x_1, \dots, x_m que satisfacen la restricción 51.

La ecuación 51 es una restricción convexa sobre x , es decir, el conjunto es convexo. Aunque parezca que la LMI ecuación 51 tiene una forma especializada, puede representar una gran variedad de restricciones convexas sobre x . En particular, las desigualdades lineales, desigualdades cuadráticas (convexas), desigualdades de norma matricial, y restricciones que surgen en la teoría de control, como las de Lyapunov y las desigualdades matriciales cuadráticas convexas, pueden adoptarse en la forma de una LMI.

2.3.3 Problemas de optimización

2.3.3.1 Terminología básica

Usamos la notación

$$\begin{array}{l} \text{minimizar } f_0(x) \\ \text{sujeto a } \begin{array}{l} f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, p \end{array} \end{array}$$

Ecuación 50. Formula general de un problema de optimización.

para describir el problema de encontrar x que minimice $f_0(x)$ entre todos los x que satisfagan las condiciones $f_i(x) \leq 0$, $i = 1, \dots, m$, y $h_i(x) = 0$, $i = 1, \dots, p$. Llamamos $x \in \mathbb{R}^n$ la variable de optimización y la función $f_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es la función objetivo o la función costo. Las inecuaciones $f_i(x) \leq 0$ se

denominan restricciones de desigualdad, y las funciones correspondientes $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ son llamadas funciones de restricción de desigualdad. Las ecuaciones $h_i(x) = 0$ son llamadas restricciones de igualdad, y las funciones $h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ son las funciones de restricción de igualdad. Si no hay restricciones (es decir, $m = p = 0$) decimos que la ecuación 52 no tiene restricciones.

El conjunto de puntos para los que se definen el objetivo y todas las funciones de restricción,

$$\mathcal{D} = \bigcap_{i=0}^m \text{dom } f_i \cap \bigcap_{i=1}^p \text{dom } h_i$$

Ecuación 51. Dominio del problema de optimización.

se denomina dominio del problema de optimización de la ecuación 50. Un punto $x \in \mathcal{D}$ es factible si satisface las restricciones $f_i(x) \leq 0$, $i = 1, \dots, m$, y $h_i(x) = 0$, $i = 1, \dots, p$. Se dice que el problema (eq) es factible si existe al menos un punto factible, y no factible en caso contrario. El conjunto de todos los puntos factibles se denomina conjunto factible o conjunto de restricciones.

El valor optimo p^* de la ecuación 52 es definido como

$$p^* = \inf \{ f_0(x) \mid f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, h_i(x) = 0, i = 1, \dots, p \}.$$

Permitimos que p^* tome los valores ampliados de $\pm\infty$. Si el problema es no factible, tenemos $p^* = \infty$ (siguiendo la convención estándar de que el infimo del conjunto vacío es ∞). Si existen puntos factibles x_k con $f_0(x_k) \rightarrow -\infty$ a medida que $k \rightarrow \infty$, luego $p^* = -\infty$, y decimos que el problema de la ecuación 52 es ilimitado por debajo.

2.3.3.2 Problemas de optimización convexa en forma estándar

La optimización convexa es el proceso de minimizar

una función objetivo convexa sujeta a restricciones convexas o, de forma equivalente, maximizar una función objetivo cóncava sujeta a restricciones convexas. Para muchos problemas de optimización convexa es posible encontrar de forma eficiente puntos que satisfagan las condiciones de optimalidad local. Dado que un punto que es un óptimo local es también un óptimo global, basta con encontrar un óptimo local para resolver el problema. Las aproximaciones convexas de problemas no convexos proporcionan límites del valor objetivo óptimo y soluciones aproximadas.

Un problema de optimización convexa es de la forma

$$\begin{array}{l} \text{minimizar } f_0(x) \\ \text{sujeto a } \begin{array}{l} f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m \\ a_i^T x = b_i, i = 1, \dots, p \end{array} \end{array}$$

Ecuación 52. Fórmula general de un problema de optimización convexa.

donde $f_0, \dots, f_m :: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones convexas, es decir, satisfacen

$$f_i(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f_i(x) + \beta f_i(y)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha + \beta = 1, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$.

Comparando el problema de la ecuación 54 con el problema general de la forma estándar de la ecuación 52, el problema convexo tiene tres requerimientos adicionales:

- La función objetivo debe ser convexa
- Las funciones de restricción de desigualdad deben ser convexas
- Las funciones de restricción de igualdad $h_i(x) = a_i^T x - b_i$ deben ser afines.

2.3.3.3 Programación semidefinida

Un programa semidefinido (SDP) es un problema de optimización donde el objetivo es una función lineal

de las variables y las restricciones consisten en restricciones LMI y restricciones de igualdad lineal:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } c^T x \\ \text{sujeto a } & F_0 + x_1 F_1 + \dots + x_n F_n \geq 0 \\ & Ax = b. \end{aligned}$$

Ecuación 53. Fórmula general de un programa semidefinido.

Los datos del problema son el vector $c \in \mathbb{R}^m$ y $m + 1$ matrices simétricas $F_0, \dots, F_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$. El signo de desigualdad en $F(x) \geq 0$ significa que $F(x)$ es positiva semidefinida, es decir, $z^T F(x) \geq 0$ para todos $z \in \mathbb{R}^n$.

Llamamos a la desigualdad $F(x) \geq 0$ una desigualdad matricial lineal y al problema de la ecuación 55 un programa semidefinido. Un programa semidefinido es un problema de optimización convexo, ya que su objetivo y su restricción son convexos: si $F(x) \geq 0$ y $F(y) \geq 0$, entonces, para todo λ , $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$F(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda F(x) + (1 - \lambda)F(y) \geq 0$$

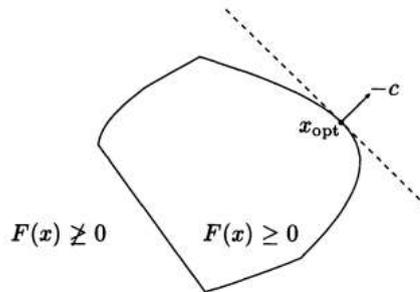


Figura 10. Ejemplo de programación semidefinida.

La figura 10 muestra un ejemplo sencillo con $x \in \mathbb{R}^2$ y $F_i \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$. El objetivo es dar una imagen genérica que muestre algunas de las características de los programas semidefinidos, por lo que los valores específicos de los datos no son relevantes. El límite de la región factible se muestra como la curva oscura. La región factible, es decir, consiste en esta curva límite junto con la región que encierra. A grandes

rasgos, el problema de programación semidefinida es moverse lo más lejos posible en la dirección $-c$, permaneciendo en la región factible. Para este programa semidefinido existe un punto óptimo, x_{opt} . Este sencillo ejemplo demuestra varias características generales de los programas semidefinidos. Ya hemos mencionado que el conjunto factible es convexo. Obsérvese que la solución óptima x_{opt} está en la frontera del conjunto factible, es decir, $F(x_{opt})$ es singular; en el caso general siempre hay un punto óptimo en la frontera (siempre que el problema sea factible). En este ejemplo, la frontera del conjunto factible no es lisa: esta consiste en dos segmentos lineales y dos segmentos curvos suaves. En el caso general, la frontera está formada por superficies algebraicas a trozos. Omitiendo algunos tecnicismos, la idea es la siguiente. En un punto donde la frontera es suave, se define localmente por algunos menores específicos de la matriz $F(x)$ que desaparecen. Por lo tanto, el límite es localmente el conjunto cero de algunos polinomios en x_1, \dots, x_m , es decir, una superficie algebraica.

2.3.4 Respuesta del punto de consigna

(Aström & Hägglund, 2009) Las siguientes especificaciones sobre el punto de consigna se expresan generalmente en el dominio del tiempo. Puede incluir requisitos sobre el tiempo de subida, tiempo de asentamiento, razón de decaimiento, sobre elongación, y error en estado estacionario frente a cambios en escalan en el punto de consigna.

2.3.4.1 Tiempo de subida (T_r)

(Aström & Hägglund, 2009) Se define o como la inversa de la máxima pendiente de la respuesta a un escalón o como el tiempo que tarda respuesta a un escalón en cambiar del 10 por ciento al 90 por ciento

de su valor en estado estacionario.

2.3.4.2 Tiempo de establecimiento (T_s)

(Aström & Hägglund, 2009) Se define como el tiempo que le lleva a la respuesta en escalón permanecer dentro del p por ciento de su valor en estado estacionario. Se suelen utilizar normalmente los valores $p = 1, 2$ y 5 por ciento del valor en estado estacionario.

2.3.4.3 Razón de decaimiento d

(Aström & Hägglund, 2009) Se define como la razón entre dos máximos consecutivos del error para un cambio en escalón en el punto de consigna o en la carga, ver la figura. El valor $d = 1/4$, que se llama razón de decaimiento de un cuarto, ha sido usado tradicionalmente. Este valor es, sin embargo, normalmente demasiado alto, como se demostrará posteriormente.

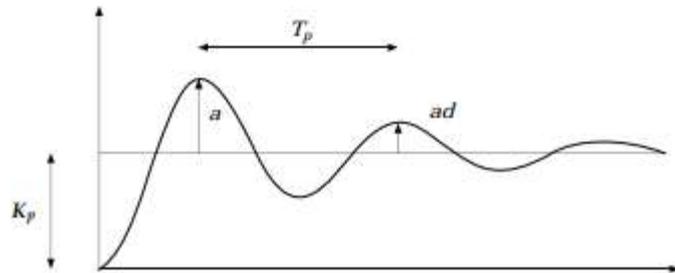


Figura 11. Determinación gráfica de modelos matemáticos para sistemas con una respuesta en escalón oscilatorio.

(Aström & Hägglund, 2009) Un modelo oscilatorio sencillo tiene tres parámetros: la ganancia estática K_p , la frecuencia natural no amortiguada $1/T$, y el amortiguamiento relativo ζ . Estos parámetros se pueden determinar aproximadamente de la respuesta en escalón tal como se muestra en la figura. Los parámetros T y ζ están relacionados con el periodo de tiempo T_p y la razón de decaimiento d como sigue:

$$d = e^{-2\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \quad T_p = \frac{2\pi T}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

o

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi/\log d)^2}} \quad T = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{2\pi} T_p$$

2.3.4.4 Sobre elongación

(Aström & Hägglund, 2009) Se define como la razón entre la diferencia entre el primer piso y el valor en estado estacionario de la respuesta a un escalón. Con frecuencia se da en tanto por ciento. En aplicaciones de control industrial es común especificar una sobre elongación máxima de 8 a 10 por ciento. Sin embargo, en muchas situaciones es deseable, tener una respuesta sobre amortiguada con ninguna sobre elongación.

2.3.4.5 Error en estado estacionario

$e_{ss} = y_{sp} - y_0$ es el error de control en estado estacionario e . Esto es siempre cero para un controlador con acción integral.

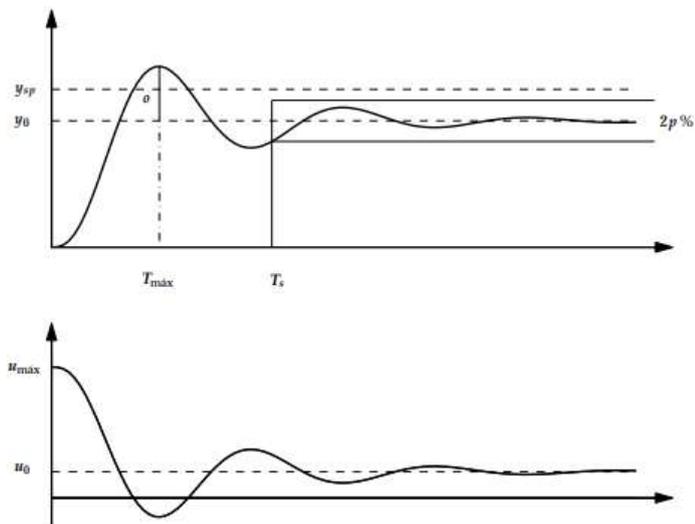


Figura 12. Especificaciones sobre el seguimiento del punto de consigna basadas en la respuesta temporal a un escalón unitario en el punto de consigna. La curva superior muestra la respuesta de

salida, y la curva inferior muestra la señal de control correspondiente.

2.4 Sistema de Hipótesis

2.4.1. General

El método de sintonización PID por optimización convexa mediante LMI alcanza un menor tiempo de establecimiento que el método de sintonización PID en una planta de primer orden MIMO 2X2.

2.5 Variables e indicadores

2.5.1 Variable 01

- Control PID

Definición:

- Método utilizado por la mayoría de procesos industriales para manejar variables que necesitan ser controladas con precisión.

Indicadores

- Variables K_p, K_i y K_d

2.5.2 Variable 02

- Tiempo de establecimiento

Definición:

- Tiempo que se necesita para que una variable de respuesta permanezca dentro de los límites determinados por el setpoint o valor de entrada.

Indicadores

- Porcentaje de error entre valor final y valor inicial

III. METODOLOGÍA EMPLEADA

3.1 Tipo y nivel de investigación

3.1.1 De acuerdo a la orientación o finalidad

El presente trabajo será un tipo de investigación exploratoria – correlacional

3.1.2 De acuerdo a la técnica de contrastación

Según la técnica de contrastación, el presente trabajo es cuantitativa

3.2 Población y muestra de estudio

3.2.1 Población

La población serán plantas de primer orden MIMO 2X2

3.2.2 Muestra

La idea principal de la selección fue la variabilidad de los procesos, es decir, investigar procesos industriales que ya se hayan trabajado anteriormente en otros trabajos y poder usar el modelo matemático

La Planta 1 fue tomada del trabajo de (Morilla et al., 2013), titulada: "Diseño de sistemas de control multivariable por desacoplo con controladores PID". Esta planta representa una columna de destilación 2x2 de Vinante-Luyben. Este proceso describe la dinámica entre la temperatura, caudales de reflujo y vapor. Se presenta el modelo matemático de dicha planta en la ecuación 54

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{-2.2e^{-s}}{7s + 1} & \frac{1.3e^{-s}}{7s + 1} \\ \frac{-2.8e^{-1.8s}}{9.5s + 1} & \frac{4.3e^{-1.05s}}{9.2s + 1} \end{pmatrix}$$

Ecuación 54. Planta 1. Columna de destilación 2x2 de Vinante-Luyben.

La Planta 2 fue tomada del mismo trabajo (Morilla et al., 2013), es un reactor de polimerización a escala industrial donde las dos variables controladas son medidas de las condiciones del reactor y las dos variables manipuladas son las referencias de los lazos secundarios de caudales de recirculación, en ecuación 55 podemos ver su modelo matemático.

$$G_R^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{22.89e^{-0.4s}}{4.572s + 1} & \frac{-11.64e^{-0.4s}}{1.807s + 1} \\ \frac{4.689e^{-0.4s}}{2.174s + 1} & \frac{5.80e^{-0.4s}}{1.801s + 1} \end{pmatrix}$$

Ecuación 55. Planta 2. Reactor de polimerización a escala industrial.

3.3 Diseño de contrastación

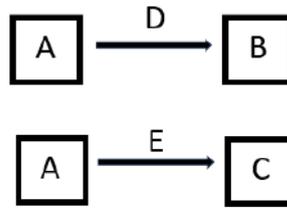


Figura 13. Diseño de contrastación.

Donde:

A: Las muestras tomadas

D: Tipo de sintonización clásica

E: Tipo de sintonización mediante LMI

B y C: Tiempos de establecimiento

3.4 Diseño de investigación

El diseño de la presente tesis vendría a ser un tipo exploratorio comparativo. Se busca realizar una comparación entre los tiempos para determinar si hubo mejora o no con la herramienta tstutend.

3.5 Procedimiento

1. Se seleccionó las muestras de las plantas de primer orden MIMO 2x2 y se modeló en el software de programación MATLAB. Se cambiaron los polos de tal manera que se acerquen y alejen del eje imaginario.
2. Se analizó la estabilidad, observabilidad y controlabilidad de las muestras de las plantas de primer orden MIMO 2x2 y se corroboró si es factible el control en dichas plantas.
3. Se sintonizó el controlador PID en las plantas de primer orden MIMO 2x2 mediante el control clásico y la optimización convexa usando LMI.
4. Se simuló las plantas, en ambos métodos, bajo efectos de controlador PID ya sintonizado. Se recolectaron los datos de tiempos de respuesta en estado estacionario en una tabla estadística en el software Excel.
5. Se graficó la banda de los cuatros para analizar el performance y la estabilidad robusta.
6. Se comparó los tiempos de respuesta en estado estacionario obtenidos en ambos métodos de sintonización.

7. Se analizaron los resultados y se logró determinar con ayuda de los instrumentos que si existe asociación significativa entre las variables.

3.6 Técnicas e instrumentos de investigación

3.6.1 Técnicas

Observación

Recolección de datos

Registro y procesamientos de datos

3.6.2 Instrumentos

t-Student

Checklist

3.7 Procesamiento y análisis de datos

Con el escenario simulado en el entorno de MATLAB, se analizará e ingresará los parámetros para cada caso de manera correcta dándose inicio al proceso. Se extraerá los datos obtenidos de tiempo de establecimiento mediante un checklist aplicando la técnica de observación para cada cambio de polo que se realice en la recolección de datos. Este proceso se realizará en los dos controles en mención con cambios en la programación y ajuste de parámetros. Cuando se tienen los datos, se procederá a realizar el análisis comparativo para determinar qué tipo de control es mejor. Este tipo de control será determinado con la herramienta estadística t-Student mediante la técnica de registro y procesamiento de datos y se encontrará la mejor respuesta para cada caso (cambio de polos).

IV. PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

4.1 Análisis e interpretación de resultados

Una vez realizada la toma de datos para las dos plantas presentadas, con sus respectivas variaciones de polos y ceros, a continuación, se presentarán los datos representados en segundos en la siguiente tabla 1.

Variaciones en la planta	PLANTA 1 (tiempo en segundos)				PLANTA 2 (tiempo en segundos)			
	SALIDA 1		SALIDA 2		SALIDA 1		SALIDA 2	
	PID	LMI	PID	LMI	PID	LMI	PID	LMI
X1000	14688.47	5120	19556.77	5110	5009.39	3520	4026.48	4690
X100	1469.39	1340	1959.71	1500	505	190	405.68	246
X10	146.81	96	195.92	101	50.31	13.30	40.71	19.50
X1	12.76	12.2	14.10	12.60	4.90	11.20	3.94	3.70
		0						
+10	12.71	10.9	10.40	9.35	5.17	3.28	7.37	3.55
		0						
+50	10.50	9.96	10.32	8.90	4.27	2.86	4.04	3.08
+100	9.90	9.83	10.29	8.41	3.96	2.80	4.63	2.86
+250	9.45	9.36	10.22	7.42	3.79	2.62	3.73	2.63
+750	9.25	8.14	10.16	5.97	3.70	2.38	3.68	2.38
+1000	9.25	7.18	10.14	5.12	3.70	2.36	3.67	2.36

Tabla 1. Datos ingresados mediante Checklist.

Se puede observar que en casi todos los casos hay una mejora en el tiempo de establecimiento entre la sintonizando de manera clásica y mediante LMI, se hizo las respectivas variaciones en el modelo matemático para poder englobar más casos y poder determinar si es que esta configuración es efectiva en su mayoría.

Con estos datos se procede a calcular el valor porcentual de mejora que hay entre el LMI y PID.

Donde:

$$d = \text{error relativo}$$

El error porcentual se calcula de la siguiente manera:

$$d = \frac{\text{Tiempo de PID} - \text{Tiempo de LMI}}{\text{Tiempo de PID}}$$

Ecuación 56. Error relativo de mejora entre LMI y PID clásico.

	PLANTA 1		PLANTA 2	
	SALIDA 1	SALIDA 2	SALIDA 1	SALIDA 2
X1000	0.65	0.74	0.30	-0.16
X100	0.09	0.23	0.62	0.39
X10	0.35	0.48	0.74	0.52
X1	0.04	0.11	-0.78	0.06
+10	0.14	0.10	0.36	0.52
+50	0.05	0.14	0.33	0.24
+100	0.01	0.18	0.29	0.38
+250	0.01	0.27	0.31	0.30
+750	0.12	0.41	0.36	0.35
+1000	0.22	0.50	0.36	0.36

Tabla 2. Error porcentual de mejora entre PID y LMI.

A continuación, se procederá a explicar sobre la herramienta a utilizar para los 4 casos establecidos en la tabla 2.

$$H_0: u_D \leq 0, \text{Hipótesis nula}$$

La hipótesis nula representa que no hay una mejora, ya que el promedio vendría a ser menor a cero.

$$H_1: u_D > 0, \text{Hipótesis alterna}$$

La hipótesis alterna viene a representar que hay mejora, ya que el promedio es mayor a 0. Cabe resaltar que, para aceptar la hipótesis alterna, la hipótesis nula debe entrar en zona o región de rechazo según la gráfica siguiente:

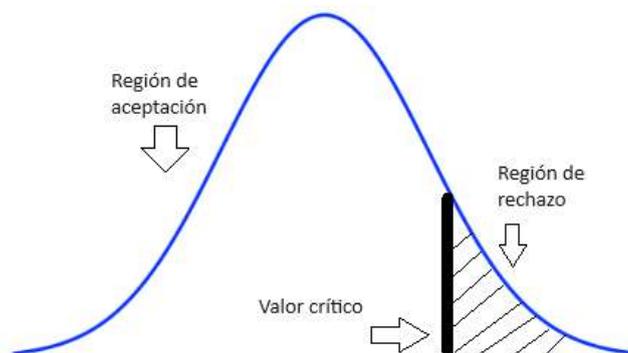


Figura 14. Región de rechazo de hipótesis nula.

Desviación estándar

$$S_d = \sqrt{\frac{(d_i - \bar{d})^2}{n - 1}}$$

Ecuación 57. Desviación estándar.

Estadístico de prueba

$$t = \frac{\bar{d}}{S_d/\sqrt{n}}$$

Ecuación 58. Formula t-Student.

Donde:

n = número de pruebas

\bar{d} = promedio del error relativo

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$$

Para obtener el valor crítico, debemos tener lo siguiente:

grados de libertad = $n - 1$

α = *nivel de significancia*

Y con estos valores, extraemos el valor crítico, hay dos maneras, mediante software con la herramienta Excel, o también de manera manual revisando la tabla de distribución tstudent, se adjunta la tabla en el Anexo 7 para la verificación el punto crítico.

Para todos los casos, el valor de gl es 9 y el α es 5% o 0,05, esto nos da un punto crítico de 1,833, este valor fue extraído desde Excel, pero en el Anexo 7 se puede verificar que es el mismo valor. Este punto crítico será igual para todos los casos.

El p-valor o la probabilidad asociada para el estadístico de prueba se calcula con el estadístico de prueba y los grados de libertad con la herramienta Excel.

Procedemos a mostrar los resultados para cada caso

✓ Caso 1 – Planta 1 salida 1

N° muestras	d
1	0.65
2	0.09
3	0.35
4	0.04
5	0.14
6	0.05
7	0.01
8	0.01
9	0.12
10	0.22

$$\bar{d} = \mathbf{0.1683}$$

$$n = \mathbf{10}$$

$$t = \mathbf{2.669004255}$$

$$g_l = n - 1 = 9$$

$$\alpha = 0.05$$

$$t_{(1-\alpha),(n-1)} = \mathbf{1.833113}$$

$$p - \text{valor} = \mathbf{0.012832148}$$

$$S_d = \sqrt{\frac{(d_i - \bar{d})^2}{n - 1}} = \mathbf{0.199444}$$

Figura 15. Análisis de hipótesis nula en entrada 1 de la Planta 1.

Se puede observar que:

- t es mayor que el valor crítico y a su vez el p-valor es menor que el nivel de significancia, por lo tanto, se cumple la hipótesis alternativa para este caso.

✓ Caso 2 – Planta 1 salida 2

N° muestras	d
1	0.74
2	0.23
3	0.48
4	0.11
5	0.10
6	0.14
7	0.18
8	0.27
9	0.41
10	0.50

$$\bar{d} = \mathbf{0.3167}$$

$$n = \mathbf{10}$$

$$t = \mathbf{4.770803635}$$

$$g_l = n - 1 = 9$$

$$\alpha = 0.05$$

$$t_{(1-\alpha),(n-1)} = \mathbf{1.833113}$$

$$p - \text{valor} = \mathbf{0.000507113}$$

$$S_d = \sqrt{\frac{(d_i - \bar{d})^2}{n - 1}} = \mathbf{0.209953}$$

Figura 16. Análisis de hipótesis nula en entrada 2 de la Planta 1.

Se puede observar que:

- t es mayor que el valor crítico y a su vez el p-valor es menor que el nivel de significancia, por lo tanto, se cumple la hipótesis alternativa para este caso.

✓ Caso 3– Planta 2 salida 1

N° muestras	d
1	0.30
2	0.62
3	0.74
4	-0.78
5	0.36
6	0.33
7	0.29
8	0.31
9	0.36
10	0.36

$$\bar{d} = \mathbf{0.2890}$$

$$n = \mathbf{10}$$

$$t = \mathbf{2.260131049}$$

$$g_l = n - 1 = 9$$

$$\alpha = 0.05$$

$$t_{(1-\alpha),(n-1)} = \mathbf{1.833113}$$

$$p - \text{valor} = \mathbf{0.025082925}$$

$$S_d = \sqrt{\frac{(d_i - \bar{d})^2}{n - 1}} = \mathbf{0.404414}$$

Figura 17. Análisis de hipótesis nula en entrada 1 de la Planta 2.

Se puede observar que:

- T es mayor que el valor crítico y a su vez el p-valor es menor que el nivel de significancia, por lo tanto, se cumple la hipótesis alternativa para este caso.

✓ Caso 4 – Panta 2 salida 2

N° muestras	d
1	-0.16
2	0.39
3	0.52
4	0.06
5	0.52
6	0.24
7	0.38
8	0.30
9	0.35
10	0.36

$$\bar{d} = \mathbf{0.2955}$$

$$n = \mathbf{10}$$

$$t = \mathbf{4.45754374}$$

$$g_l = n - 1 = 9$$

$$\alpha = 0.05$$

$$t_{(1-\alpha),(n-1)} = \mathbf{1.833113}$$

$$p - \text{valor} = \mathbf{0.000791429}$$

$$S_d = \sqrt{\frac{(d_i - \bar{d})^2}{n - 1}} = \mathbf{0.209606}$$

Figura 18. Análisis de hipótesis nula en entrada 2 de la Planta 2.

Se puede observar que:

- t es mayor que el valor crítico y a su vez el p-valor es menor que el nivel de significancia, por lo tanto, se cumple la hipótesis alternativa para este caso.

V. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Para el desarrollo de la presente tesis, se optó por comparar el método de sintonización tradicional con el método de sintonización mediante LMI, debido a que es un método no estudiado a profundidad, últimamente hay trabajos relacionados a esta materia, además que casi todos los equipos utilizados para control, sea plc, variadores, microcontroladores, entre otros, utilizan el método tradicional de sintonización.

- En la tabla 2, se tiene un total de 40 valores, de los cuales 2 representan que no hubo mejora en el tiempo de establecimiento, 2 de 40, esto en porcentaje se representa con un 95% de mejora en general. Se puede decir que, en 40 casos, un 95% de casos concluyeron con una mejora en el tiempo de establecimiento
- En los 4 casos presentados, el valor de significancia es mayor, por lo tanto, se puede considerar disminuirlo para algunos casos, ya que al variarlo a un valor menor, haría que el punto crítico aumente, por ende puede que el estadístico de prueba aún se encuentre en zona de rechazo para la hipótesis nula y nos daría una precisión mayor.

CONCLUSIONES

- Se estudiaron y describieron los métodos de sintonización elegidos, PID clásico y control PID por optimización convexa mediante LMI, y teniendo en cuenta sus parámetros, se elaboraron algoritmos para cada método, que dio como respuesta los tiempos de establecimiento y las gráficas de respuesta al escalón unitario.
- Se midieron los tiempos de establecimiento de los métodos de sintonización elegidos, control PID clásico y control PID por optimización convexa mediante LMI.
- Se compararon y evaluaron los tiempos de establecimiento para ambos métodos de control, lo que nos permitió tener una vista más amplia del impacto y la mejora de rendimiento que se puede alcanzar.
- Se evidenciaron en la Tabla 2, a simple vista, las mejoras de sintonización entre método tradicional y LMI y, por ende, la disminución en el tiempo de establecimiento. Posteriormente, se analizó con la herramienta t-Student la cual nos dio la veracidad de la hipótesis planteada en este trabajo.

RECOMENDACIONES

- Se puede indagar más a profundidad sobre el LMI, realizar cambios en sus parámetros para poder hacer que no aparezcan fallas, o encontrar una generalidad ya que en la presente tesis se encontró que, en 40 tomas, 2 no mejoraron.
- En la presente tesis se tomó como referencia un control PID de 1 grado, en futuros trabajos se podría usar un control PID con dos grados de libertad y comprobar si los resultados cambian o se siguen manteniendo.
- Realizar una prueba para plantas de MIMO de múltiples entradas y salidas (2x3, 3x3, 3x4, entre otras), para poder determinar si hay algún patrón de mejora.
- Implementación en algún controlador una sintonización mediante LMI, para determinar cómo es su respuesta en base al hardware.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Albertos, P., & Sala, A. (2003). *Multivariable Control Systems: An Engineering Approach* | SpringerLink. Springer.
<https://link.springer.com/book/10.1007/b97506>
- Aström, K., & Hägglund, T. (2009). *Control PID Avanzado* (1° Ed.). Pearson Educación.
- Bernhardsson, B., & Åström, K. J. (s. f.). *Control System Design—PID Control*.
- Boyd, S., Hast, M., & Åström, K. J. (2016). MIMO PID tuning via iterated LMI restriction. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 26(8), 1718-1731. <https://doi.org/10.1002/rnc.3376>
- Hammond, M. H. (1963). *Multivariable systems*. Kansas State University.
- He, Y., & Wang, Q.-G. (2006). An Improved ILMI Method for Static Output Feedback Control With Application to Multivariable PID Control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(10), 1678-1683.
<https://doi.org/10.1109/TAC.2006.883029>
- Mercader, P., Cánovas, C. D., & Baños, A. (2019). Control PID Multivariable de una Caldera de Vapor. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial*, 16(1), Article 1.
<https://doi.org/10.4995/riai.2018.9034>
- Merrikh-Bayat, F., Bayat, F., & Tofighi, S. (2022). Designing and tuning MIMO feedforward controllers using iterated LMI restriction. *Electronic Research Archive*, 30(7), Article era-30-07-126.
<https://doi.org/10.3934/era.2022126>
- Morilla, F., Garrido, J., & Vázquez, F. (2013). Control Multivariable por Desacoplo. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial*, 10(1), Article 1. <https://doi.org/10.1016/j.riai.2012.11.001>
- Nisi, K., Nagaraj, B., & Agalya, A. (2018). *Tuning of a PID controller using*

evolutionary multi objective optimization methodologies and application to the pulp and paper industry. 10. <https://doi.org/10.1007/s13042-018-0831-8>

Ogata, K. (2002). *Modern Control Engineering* (4.^a ed.). Prentice Hall.

Skogestad, S., & Postlethwaite, I. (2005). *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design* (2.^a ed.). John Wiley & Sons, Inc.

Wang, Q.-G., Ye, Z., Cai, W.-J., & Hang, C.-C. (2008). Optimal Multivariable PID Control Based on LMI Approach. En Q.-G. Wang, Z. Ye, W.-J. Cai, & C.-C. Hang (Eds.), *PID Control for Multivariable Processes* (pp. 167-202). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-540-78482-1_7

Zill, D. G. (2018). *Advanced engineering mathematics* (Sixth edition). Jones & Bartlett Learning.

ANEXOS

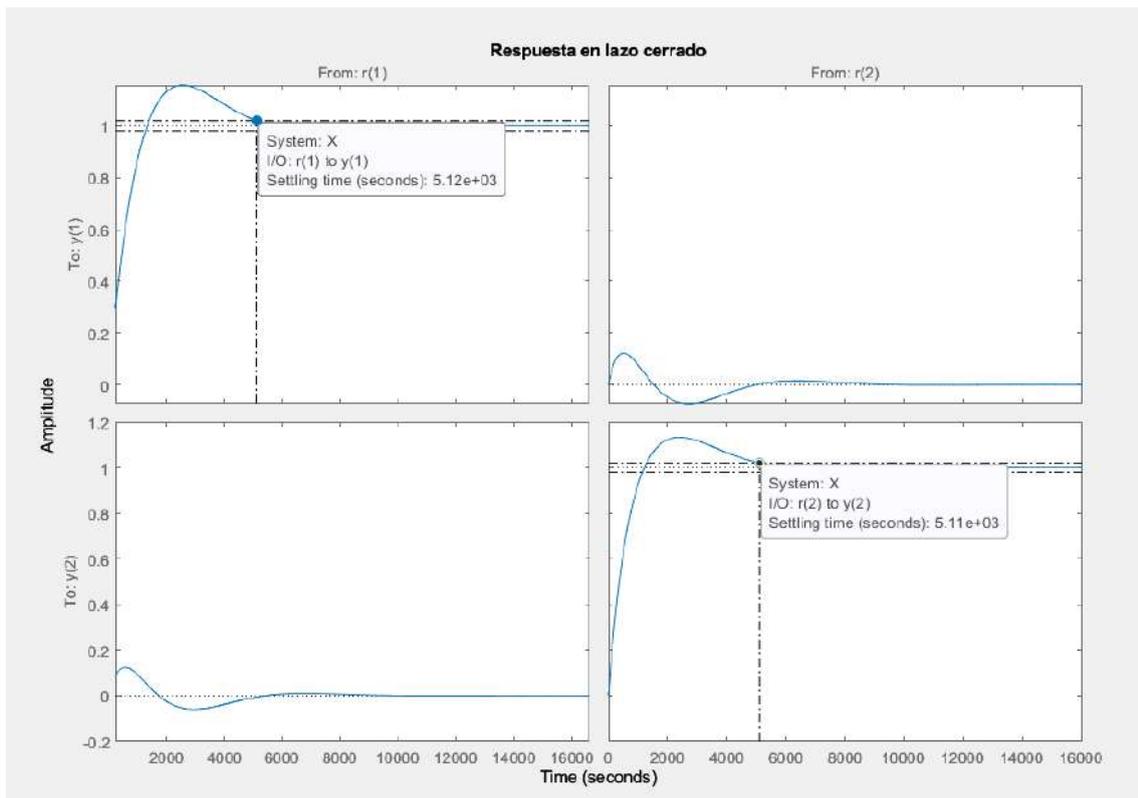
ANEXO 1

TOMA DE DATOS PLANTA 1 – SINTONIZACIÓN MEDIANTE LMI

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{-2.2e^{-s}}{7s + 1} & \frac{1.3e^{-s}}{7s + 1} \\ \frac{-2.8e^{-1.8s}}{9.5s + 1} & \frac{4.3e^{-1.05s}}{9.2s + 1} \end{pmatrix}$$

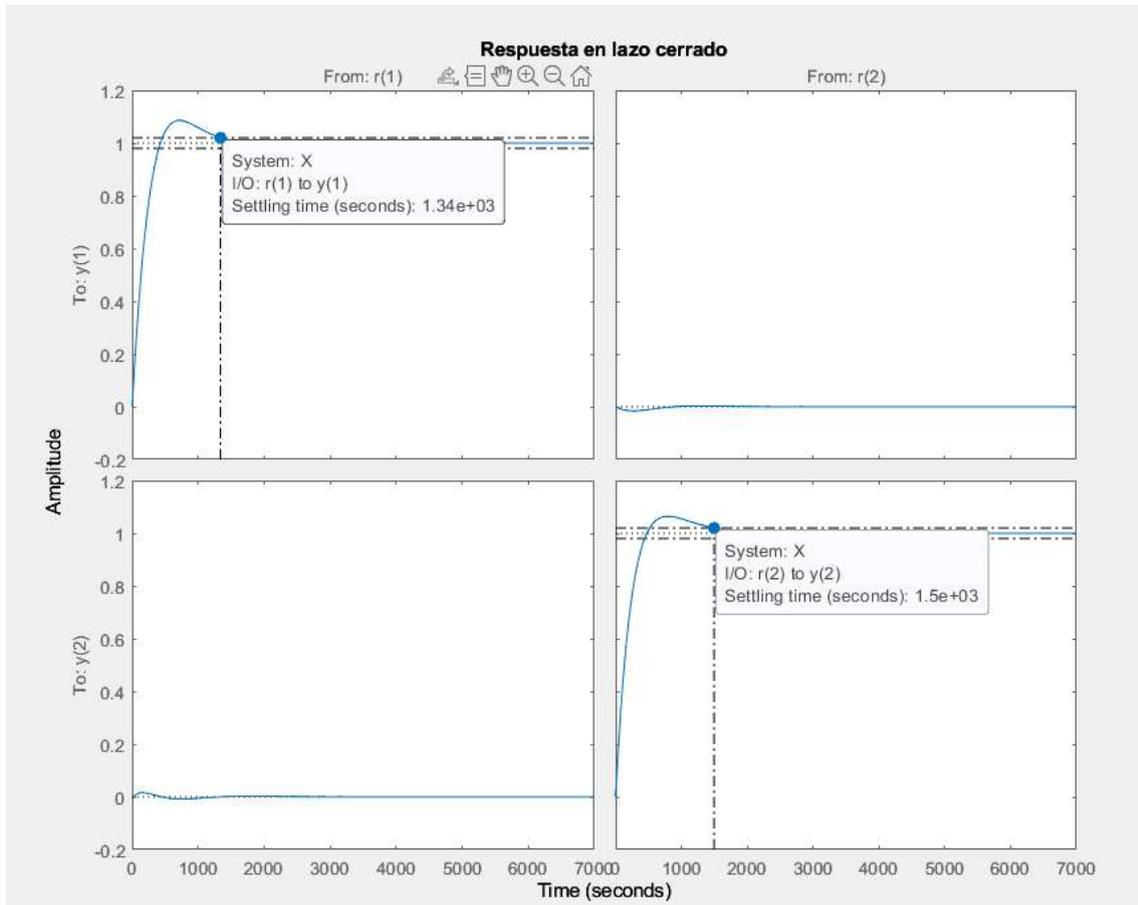
- CASO 1 - x1000

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{-2.2e^{-s}}{7000s + 1} & \frac{1.3e^{-s}}{7000s + 1} \\ \frac{-2.8e^{-1.8s}}{9500s + 1} & \frac{4.3e^{-1.05s}}{9200s + 1} \end{pmatrix}$$



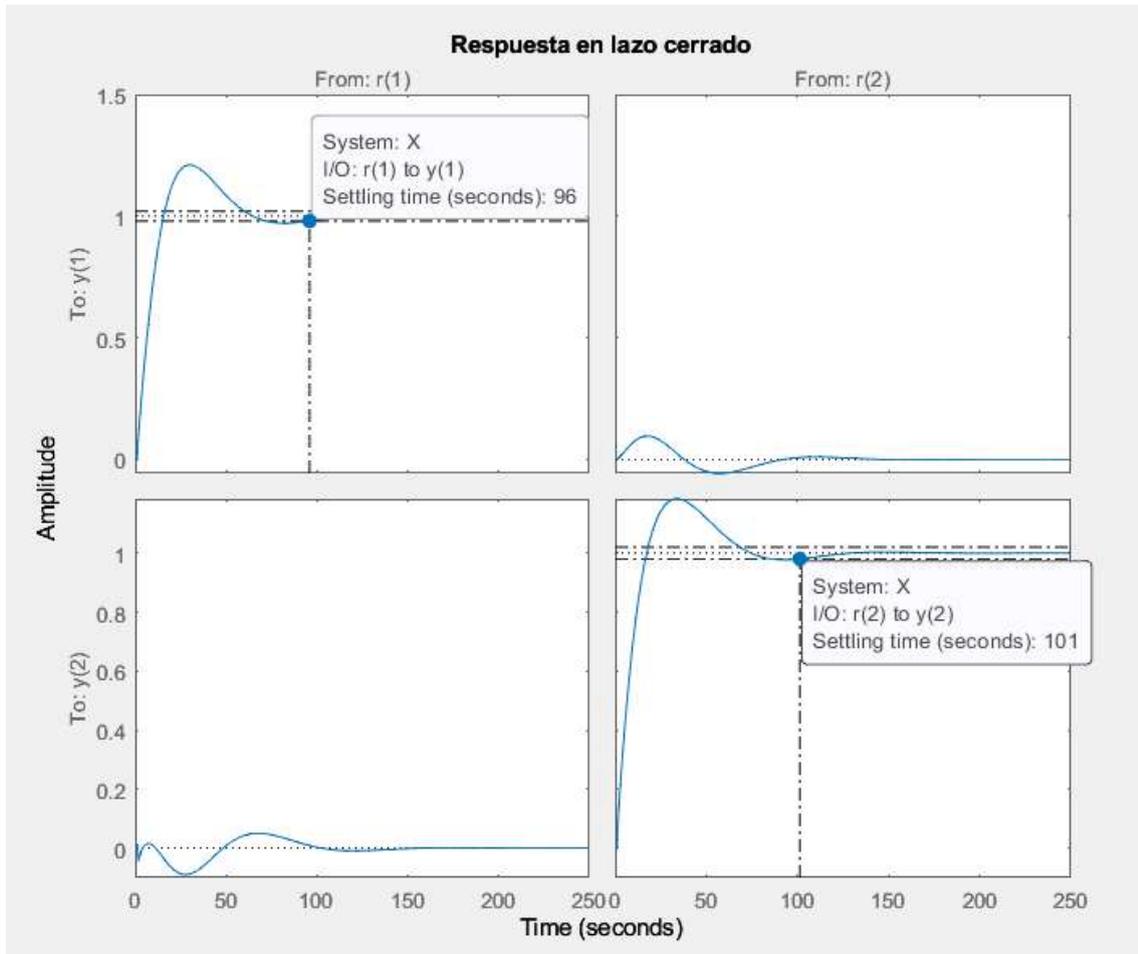
- CASO 2 – x100

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{-2.2e^{-s}}{700s + 1} & \frac{1.3e^{-s}}{700s + 1} \\ \frac{-2.8e^{-1.8s}}{950s + 1} & \frac{4.3e^{-1.05s}}{920s + 1} \end{pmatrix}$$



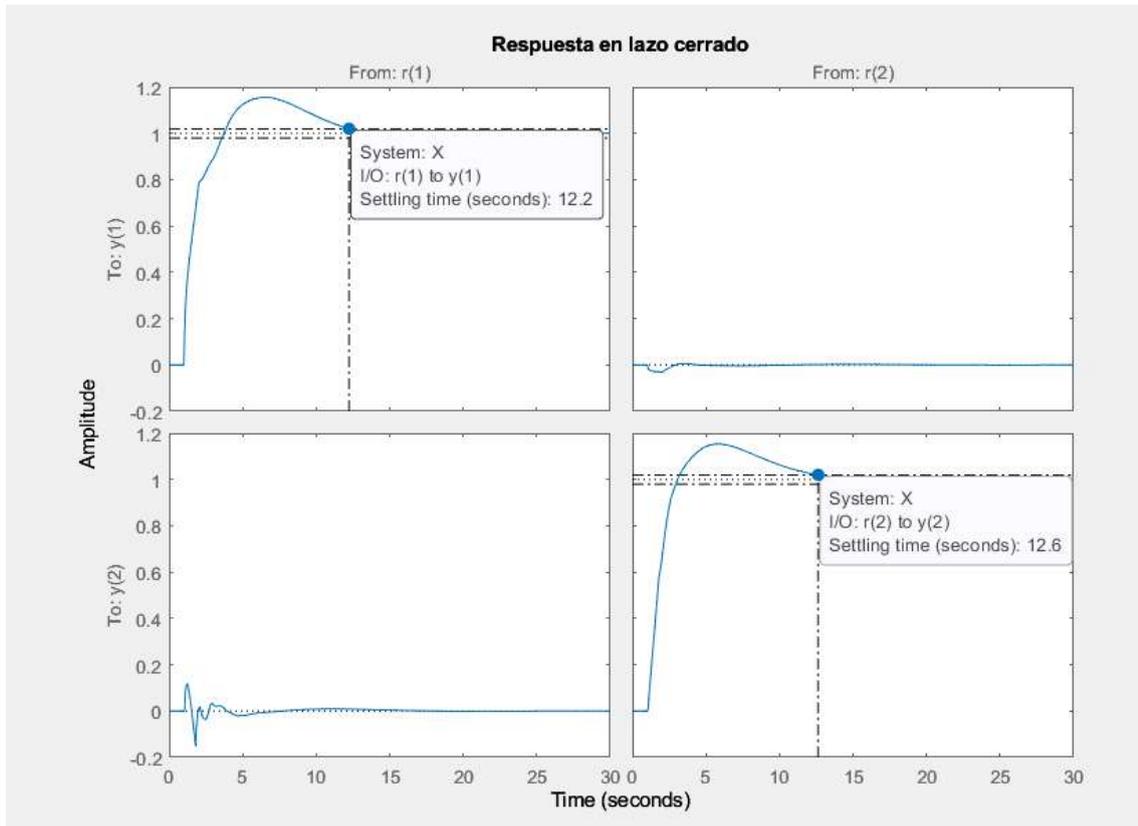
- CASO 3 – x10

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{-2.2e^{-s}}{70s + 1} & \frac{1.3e^{-s}}{70s + 1} \\ \frac{-2.8e^{-1.8s}}{95s + 1} & \frac{4.3e^{-1.05s}}{92s + 1} \end{pmatrix}$$



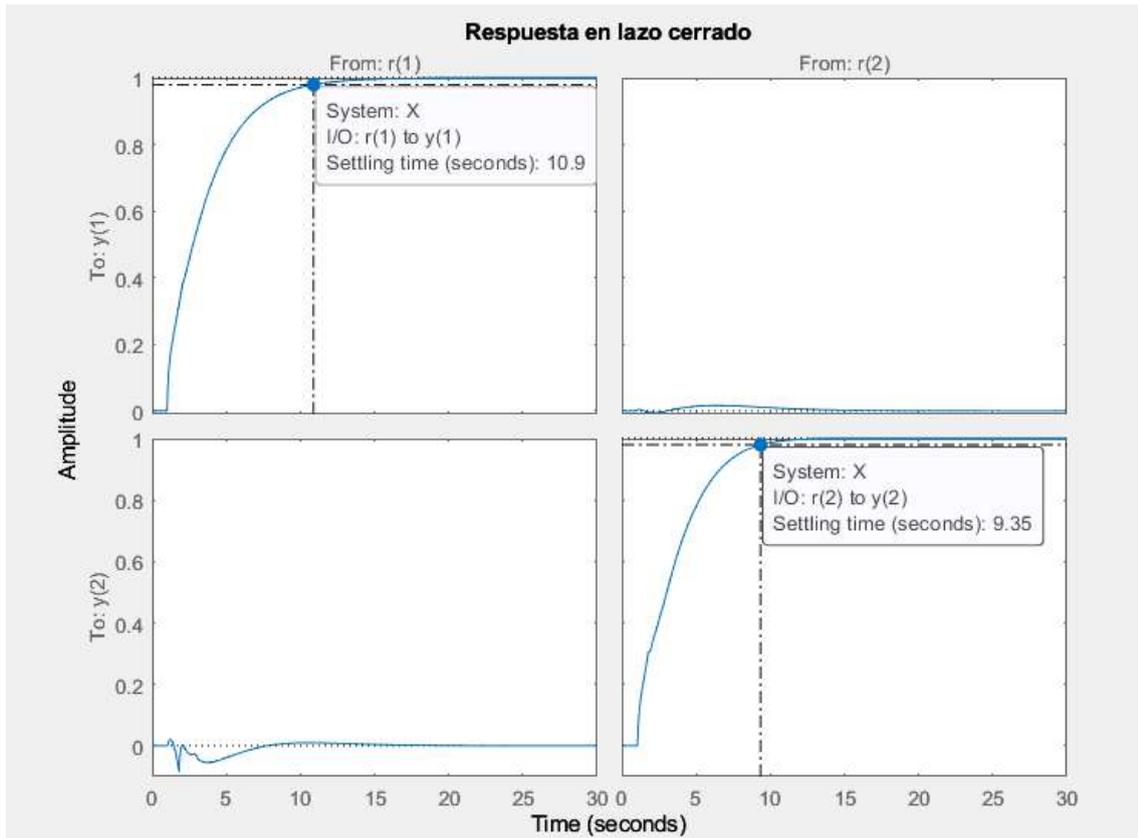
- CASO 4 – +1

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{-2.2e^{-s}}{7s + 1} & \frac{1.3e^{-s}}{7s + 1} \\ \frac{-2.8e^{-1.8s}}{9.5s + 1} & \frac{4.3e^{-1.05s}}{9.2s + 1} \end{pmatrix}$$



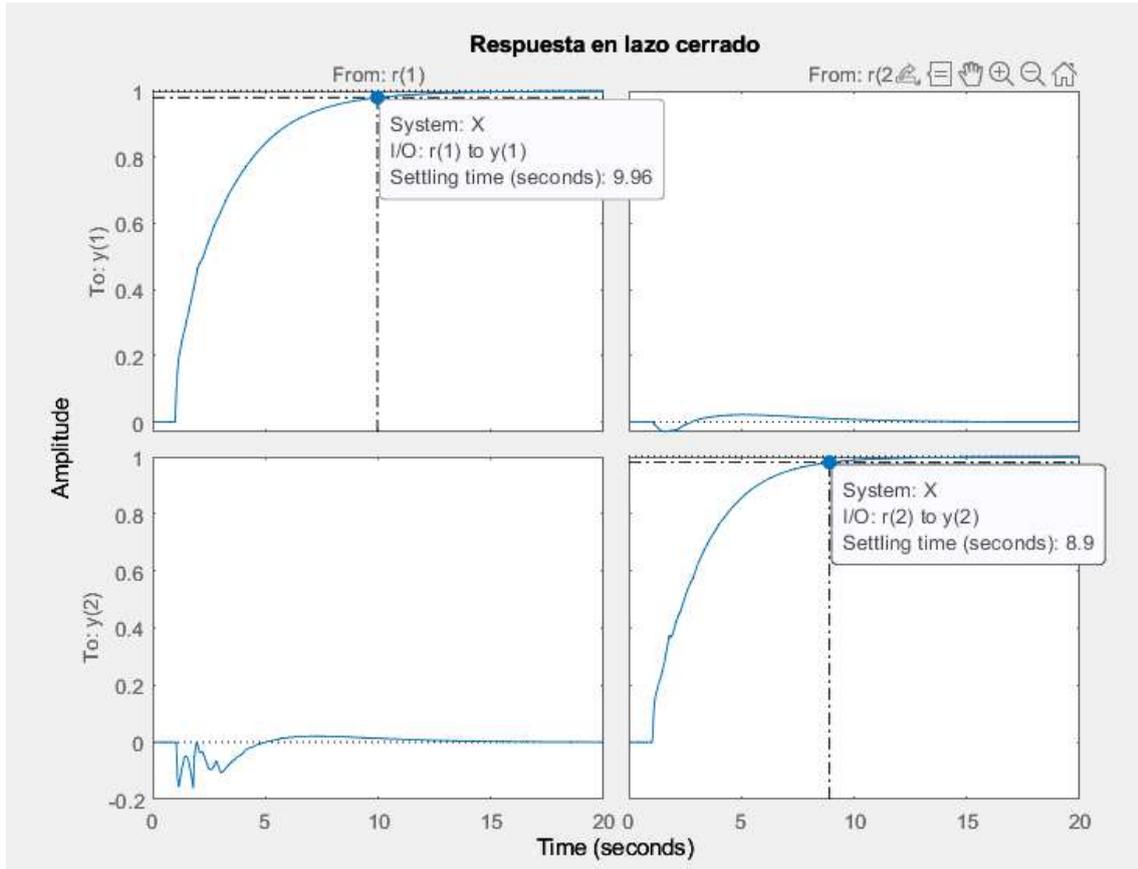
- CASO 5 - +10

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{-2.2e^{-s}}{7s + 10} & \frac{1.3e^{-s}}{7s + 10} \\ \frac{-2.8e^{-1.8s}}{9.5s + 10} & \frac{4.3e^{-1.05s}}{9.2s + 10} \end{pmatrix}$$



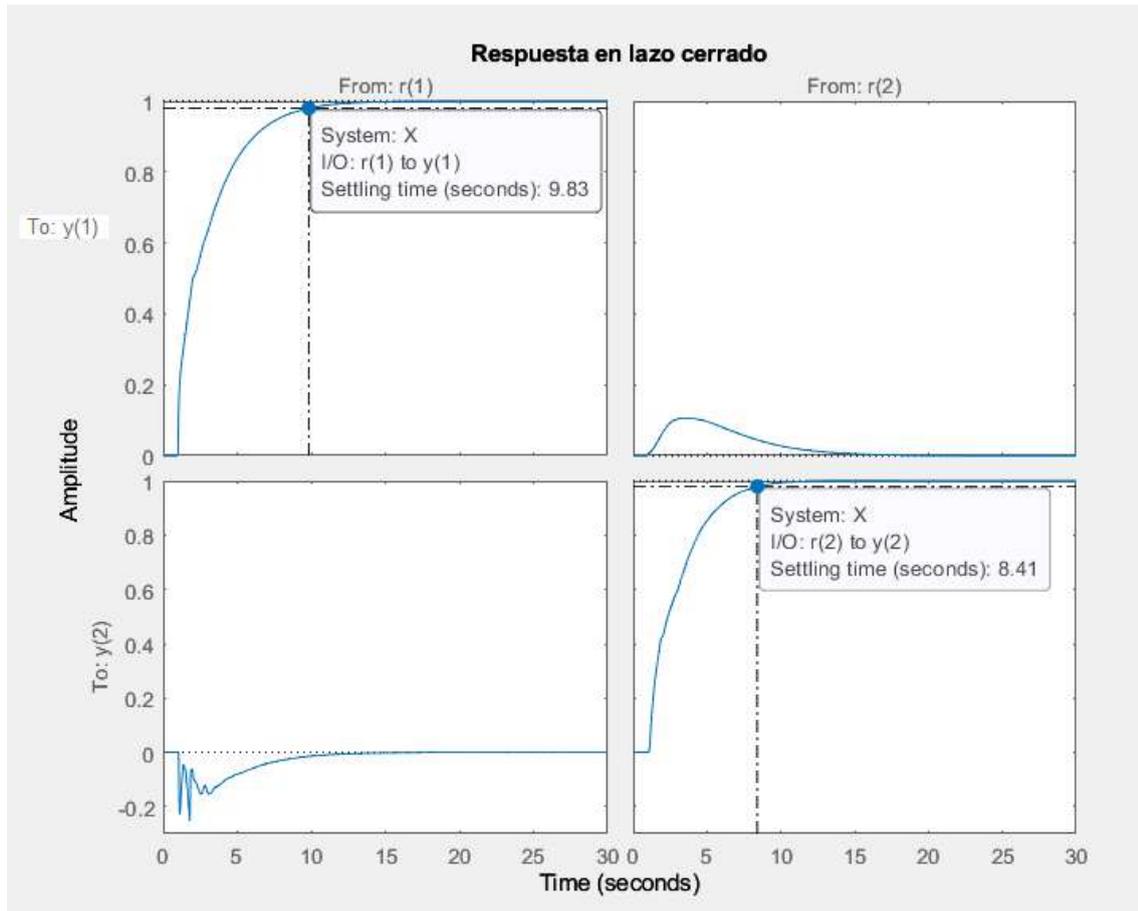
- CASO 6 - +50

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{-2.2e^{-s}}{7s + 50} & \frac{1.3e^{-s}}{7s + 50} \\ \frac{-2.8e^{-1.8s}}{9.5s + 50} & \frac{4.3e^{-1.05s}}{9.2s + 50} \end{pmatrix}$$



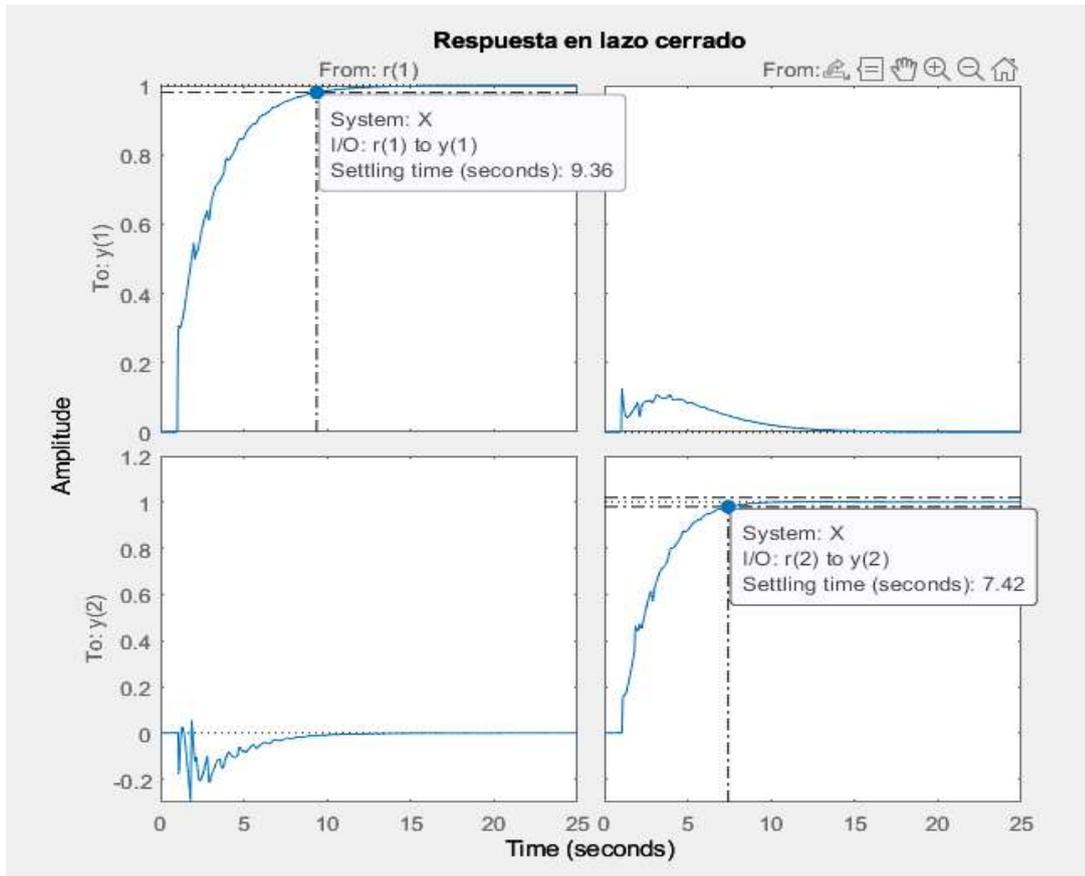
- CASO 7 – +100

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{-2.2e^{-s}}{7s + 100} & \frac{1.3e^{-s}}{7s + 100} \\ \frac{-2.8e^{-1.8s}}{9.5s + 100} & \frac{4.3e^{-1.05s}}{9.2s + 100} \end{pmatrix}$$



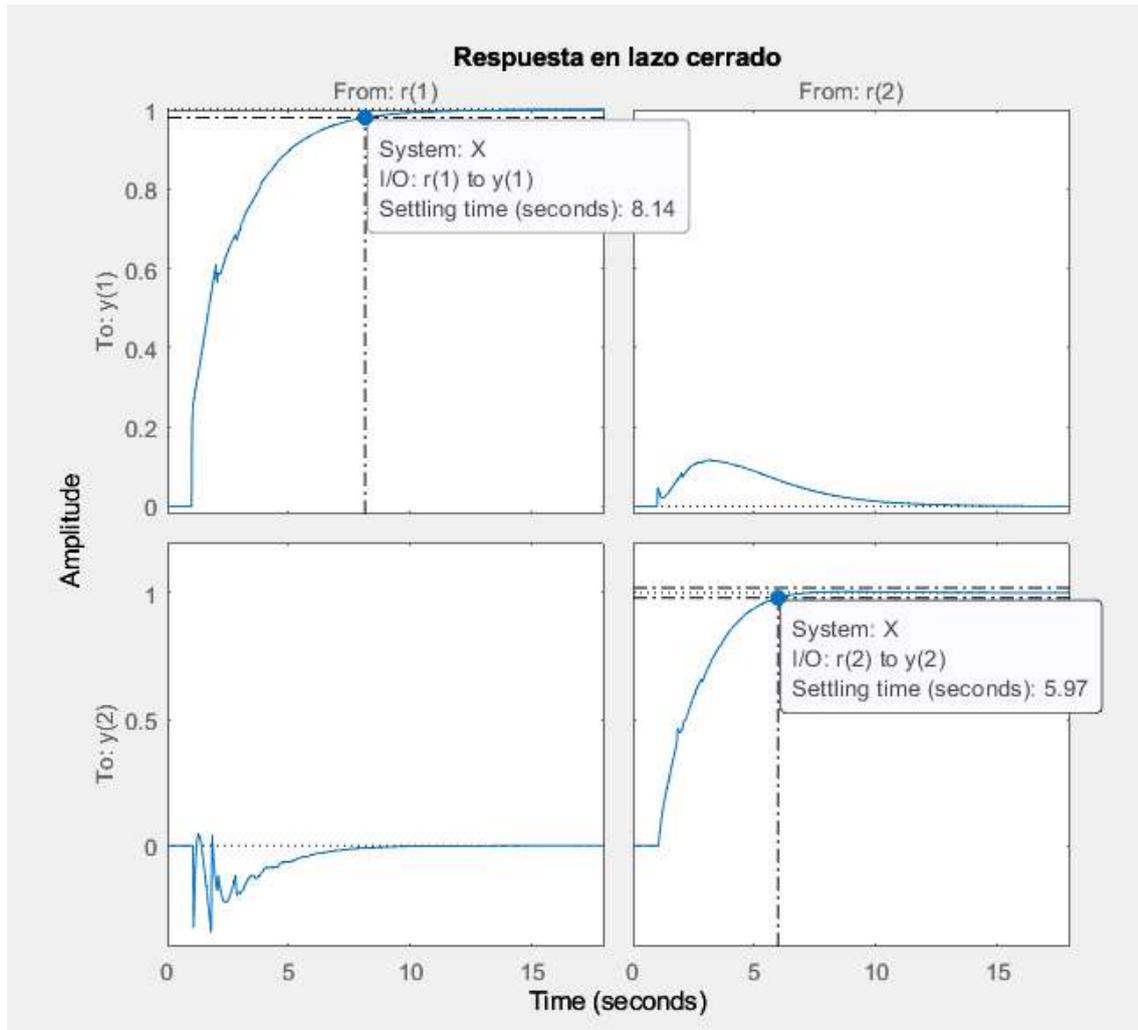
- CASO 8 – +250

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{-2.2e^{-s}}{7s + 250} & \frac{1.3e^{-s}}{7s + 250} \\ \frac{-2.8e^{-1.8s}}{9.5s + 250} & \frac{4.3e^{-1.05s}}{9.2s + 250} \end{pmatrix}$$



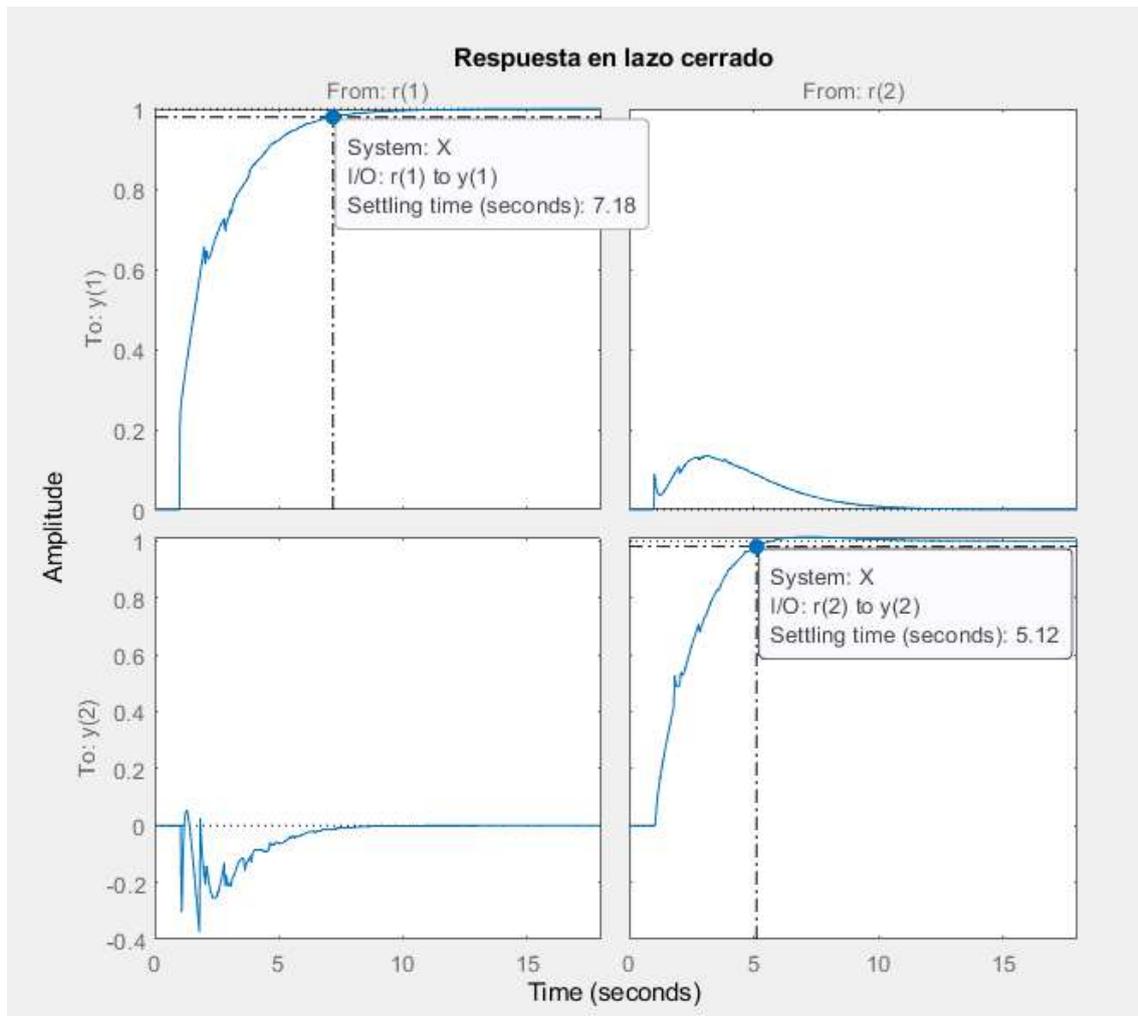
- CASO 9 - +750

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{-2.2e^{-s}}{7s + 750} & \frac{1.3e^{-s}}{7s + 750} \\ \frac{-2.8e^{-1.8s}}{9.5s + 750} & \frac{4.3e^{-1.05s}}{9.2s + 750} \end{pmatrix}$$



- CASO 10 - +1000

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{-2.2e^{-s}}{7s + 1000} & \frac{1.3e^{-s}}{7s + 1000} \\ \frac{-2.8e^{-1.8s}}{9.5s + 1000} & \frac{4.3e^{-1.05s}}{9.2s + 1000} \end{pmatrix}$$



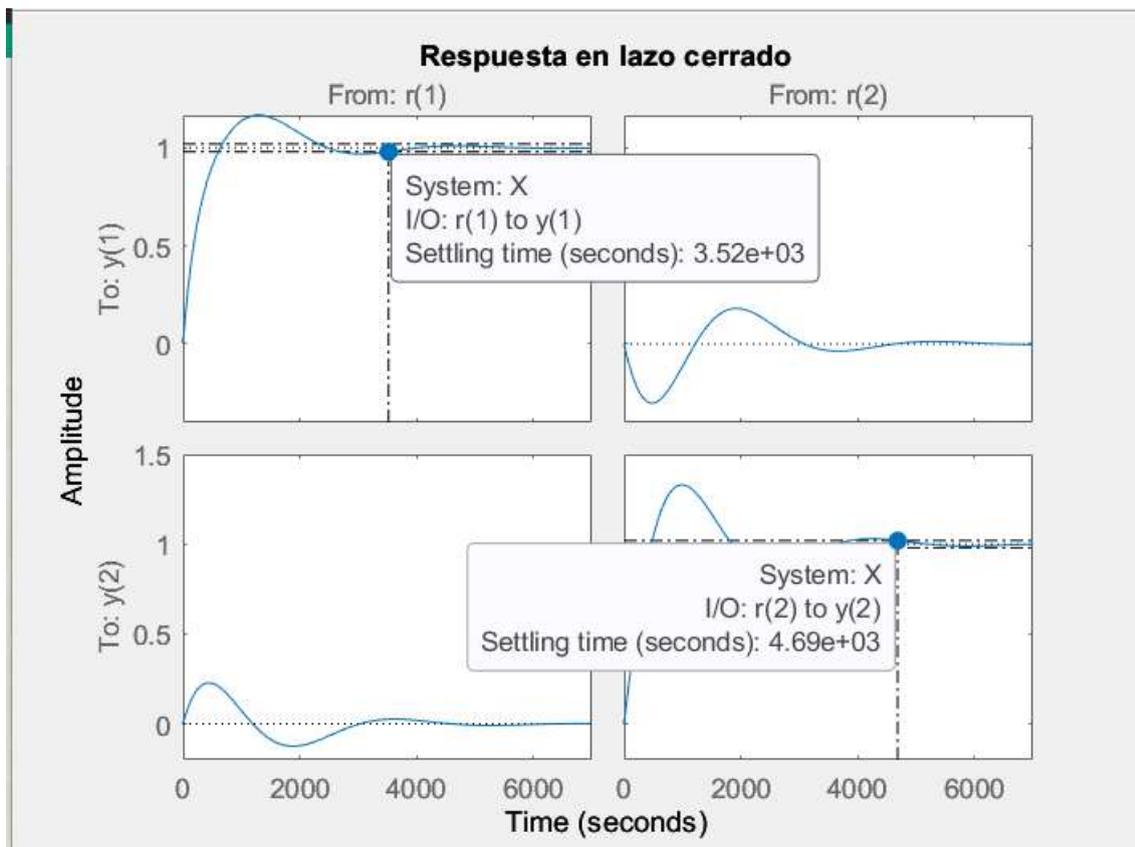
ANEXO 2

TOMA DE DATOS PLANTA 2 – SINTONIZACIÓN MEDIANTE LMI

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{22.89e^{-0.4s}}{4.572s + 1} & \frac{-11.64e^{-0.4s}}{1.807s + 1} \\ \frac{4.689e^{-0.4s}}{2.17s + 1} & \frac{5.8e^{-0.4s}}{1.801s + 1} \end{pmatrix}$$

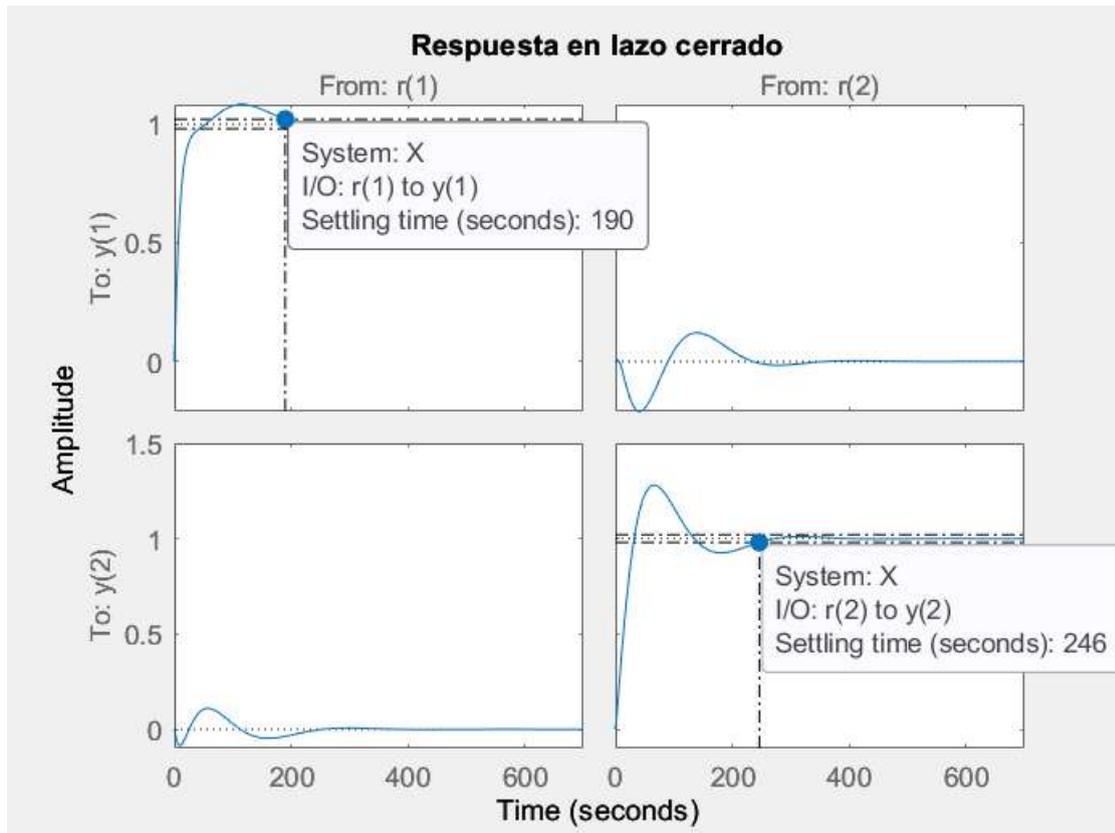
- CASO 1 – x1000

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{22.89e^{-0.4s}}{4572s + 1} & \frac{-11.64e^{-0.4s}}{1807s + 1} \\ \frac{4.689e^{-0.4s}}{2170s + 1} & \frac{5.8e^{-0.4s}}{1801s + 1} \end{pmatrix}$$



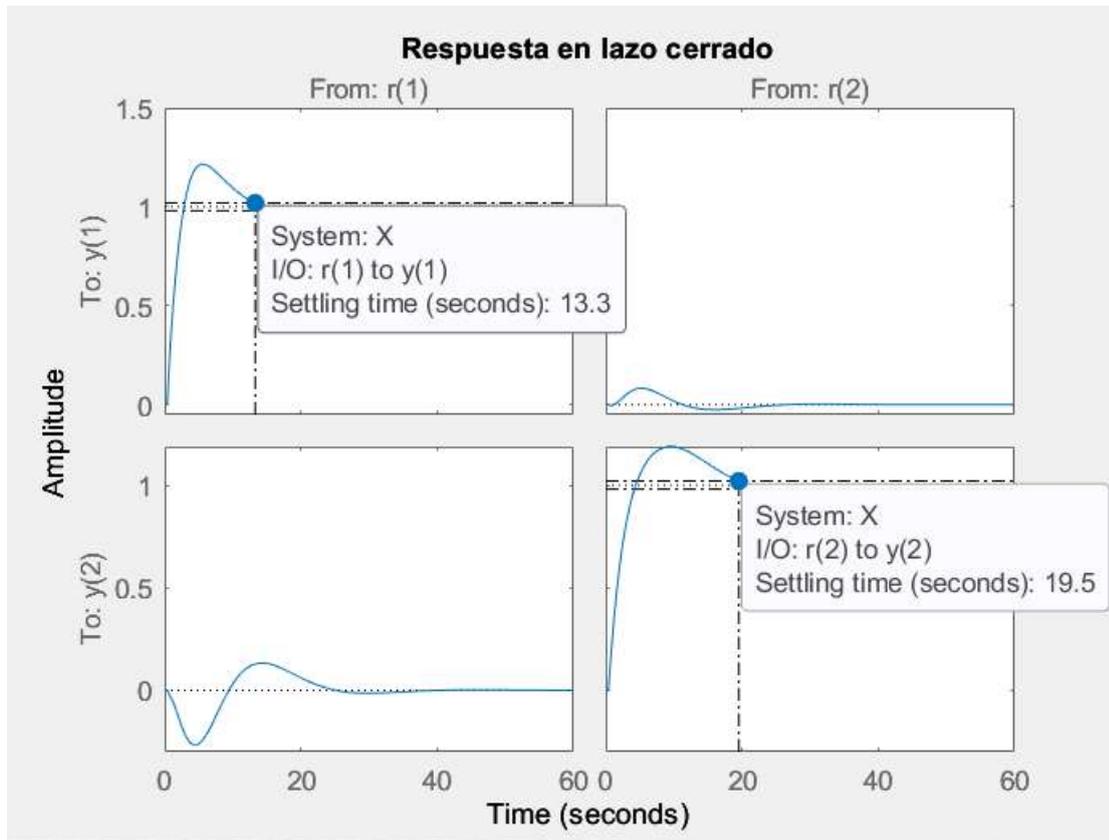
- CASO 2 – x100

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{22.89e^{-0.4s}}{457.2s + 1} & \frac{-11.64e^{-0.4s}}{180.7s + 1} \\ \frac{4.689e^{-0.4s}}{217s + 1} & \frac{5.8e^{-0.4s}}{180.1s + 1} \end{pmatrix}$$



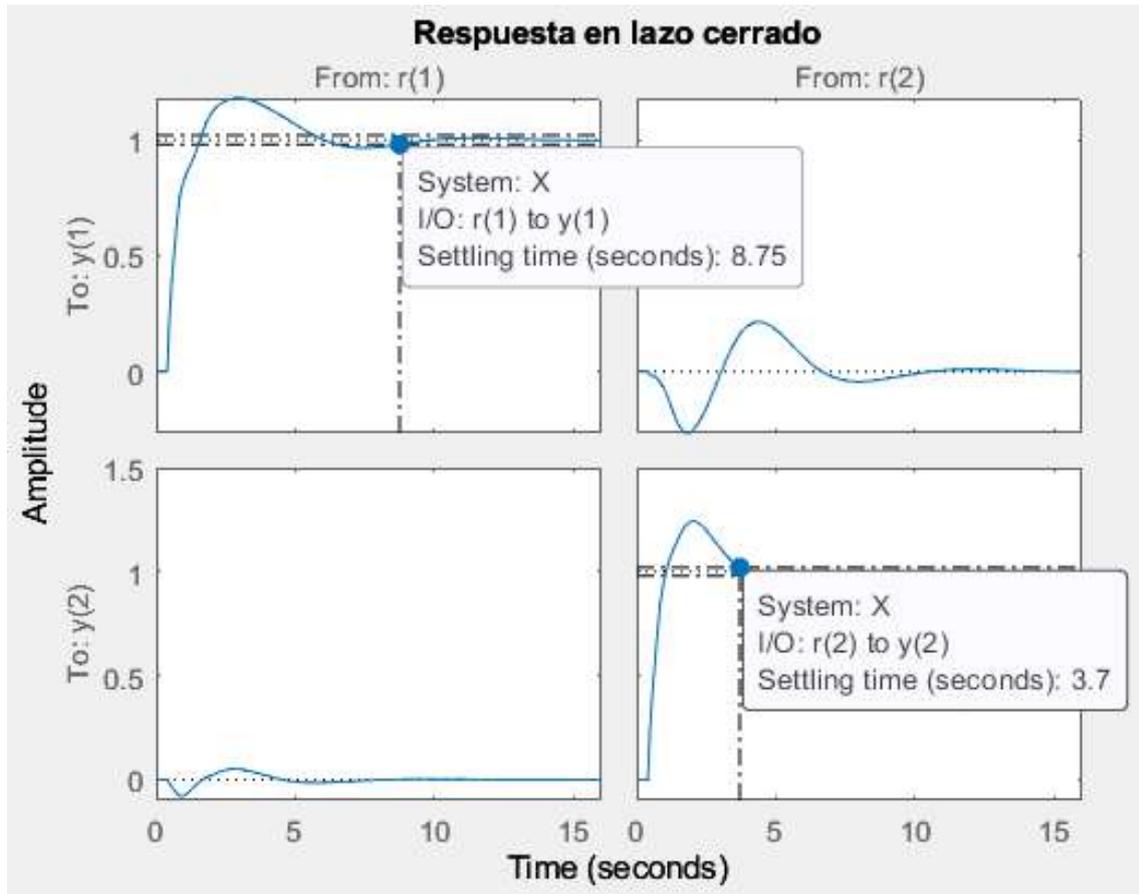
- CASO 3 – x10

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{22.89e^{-0.4s}}{45.72s + 1} & \frac{-11.64e^{-0.4s}}{18.07s + 1} \\ \frac{4.689e^{-0.4s}}{21.7s + 1} & \frac{5.8e^{-0.4s}}{18.01s + 1} \end{pmatrix}$$



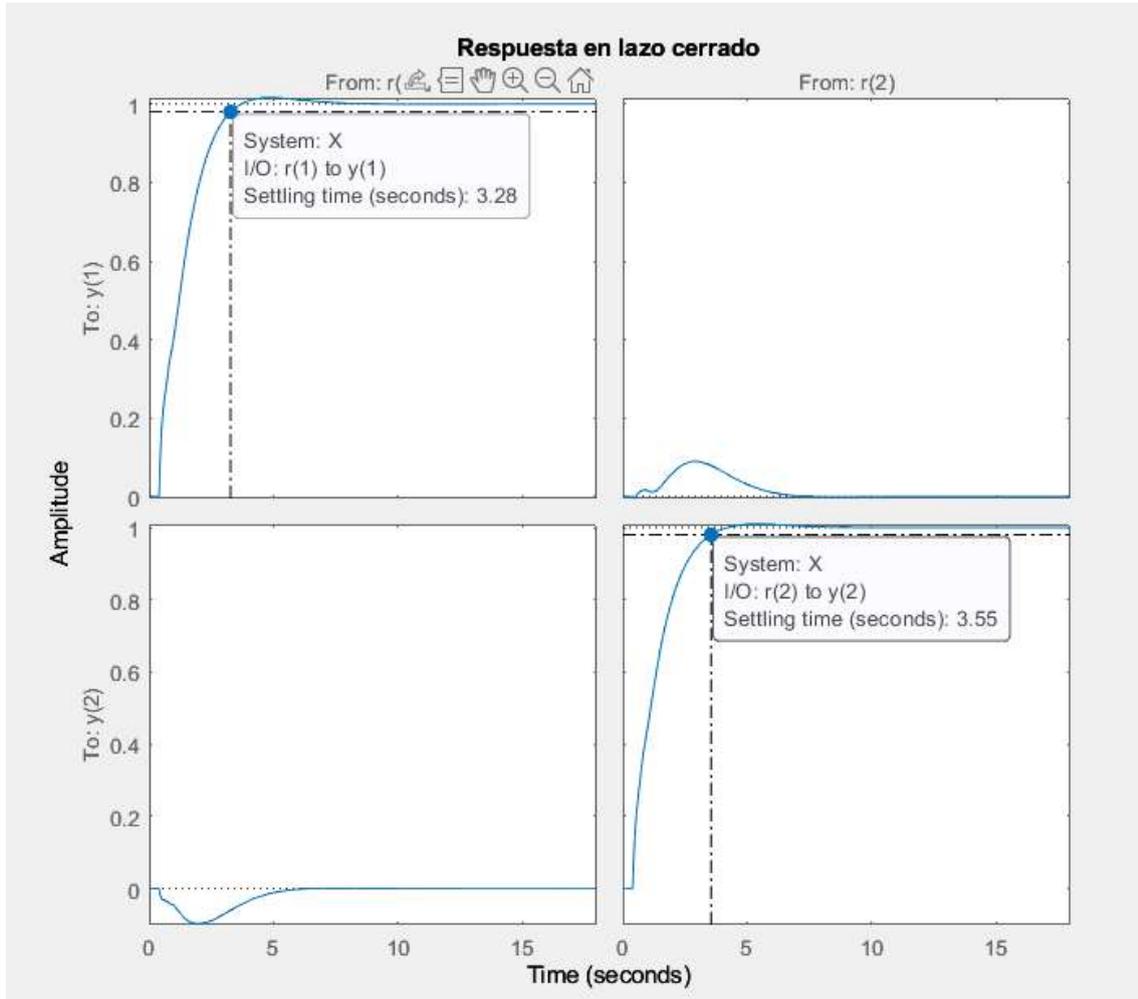
- CASO 4 – +1

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{22.89e^{-0.4s}}{4.572s + 1} & \frac{-11.64e^{-0.4s}}{1.807s + 1} \\ \frac{4.689e^{-0.4s}}{2.17s + 1} & \frac{5.8e^{-0.4s}}{1.801s + 1} \end{pmatrix}$$



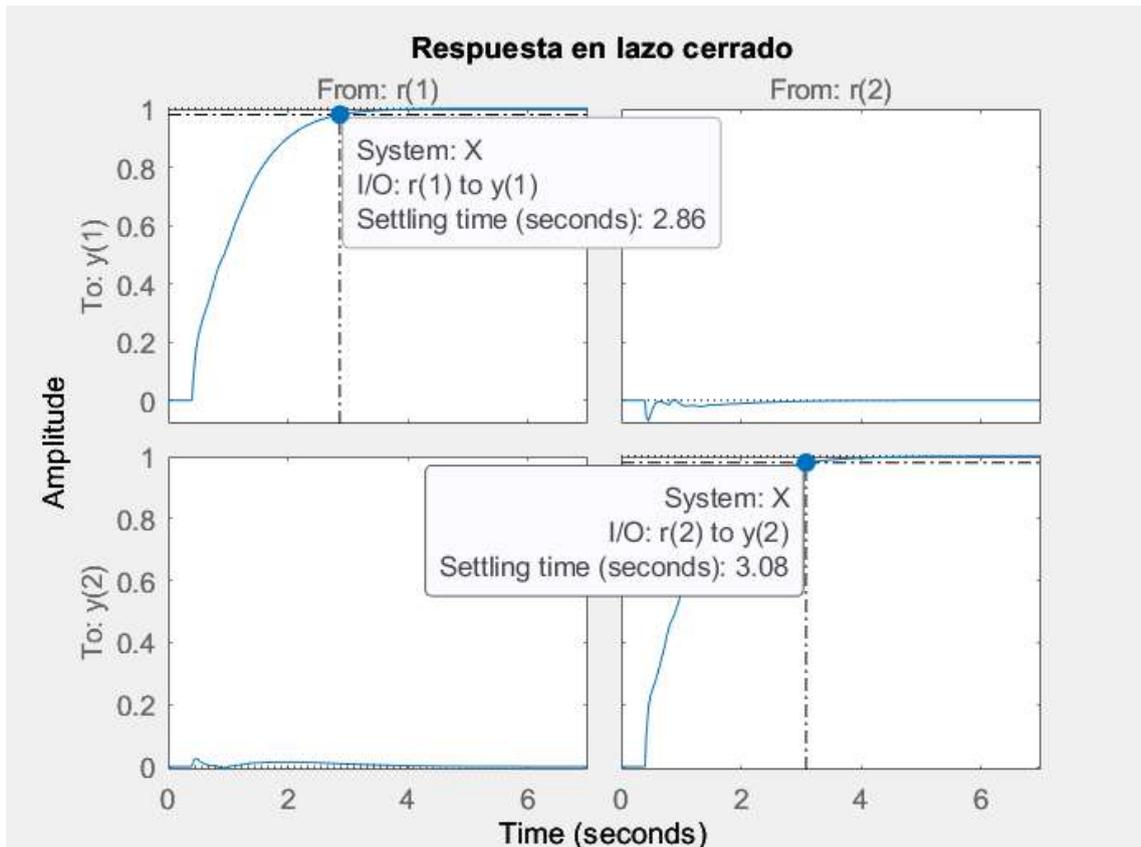
- CASO 5 – +10

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{22.89e^{-0.4s}}{4.572s + 10} & \frac{-11.64e^{-0.4s}}{1.807s + 10} \\ \frac{4.689e^{-0.4s}}{2.17s + 10} & \frac{5.8e^{-0.4s}}{1.801s + 10} \end{pmatrix}$$



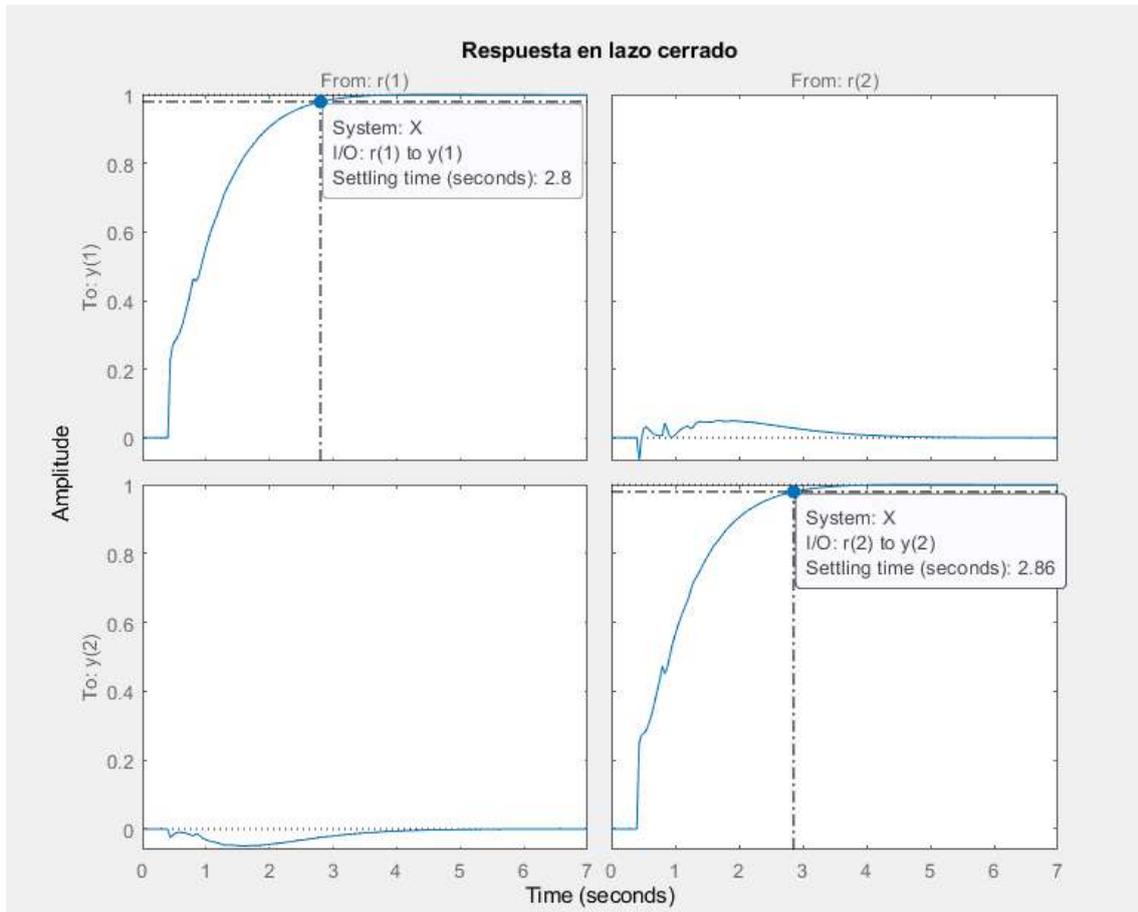
- CASO 6 - +50

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{22.89e^{-0.4s}}{4.572s + 100} & \frac{-11.64e^{-0.4s}}{1.807s + 100} \\ \frac{4.689e^{-0.4s}}{2.17s + 100} & \frac{5.8e^{-0.4s}}{1.801s + 100} \end{pmatrix}$$



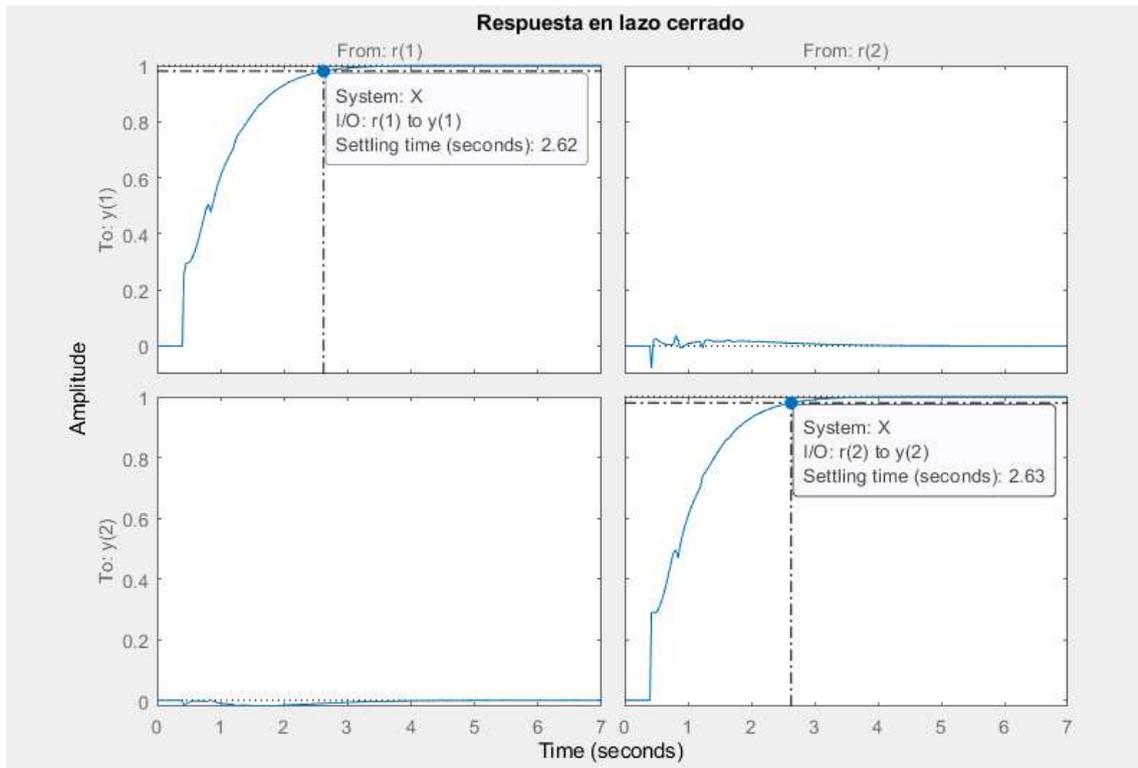
- CASO 7 - +100

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{22.89e^{-0.4s}}{4.572s + 250} & \frac{-11.64e^{-0.4s}}{1.807s + 250} \\ \frac{4.689e^{-0.4s}}{2.17s + 250} & \frac{5.8e^{-0.4s}}{1.801s + 250} \end{pmatrix}$$



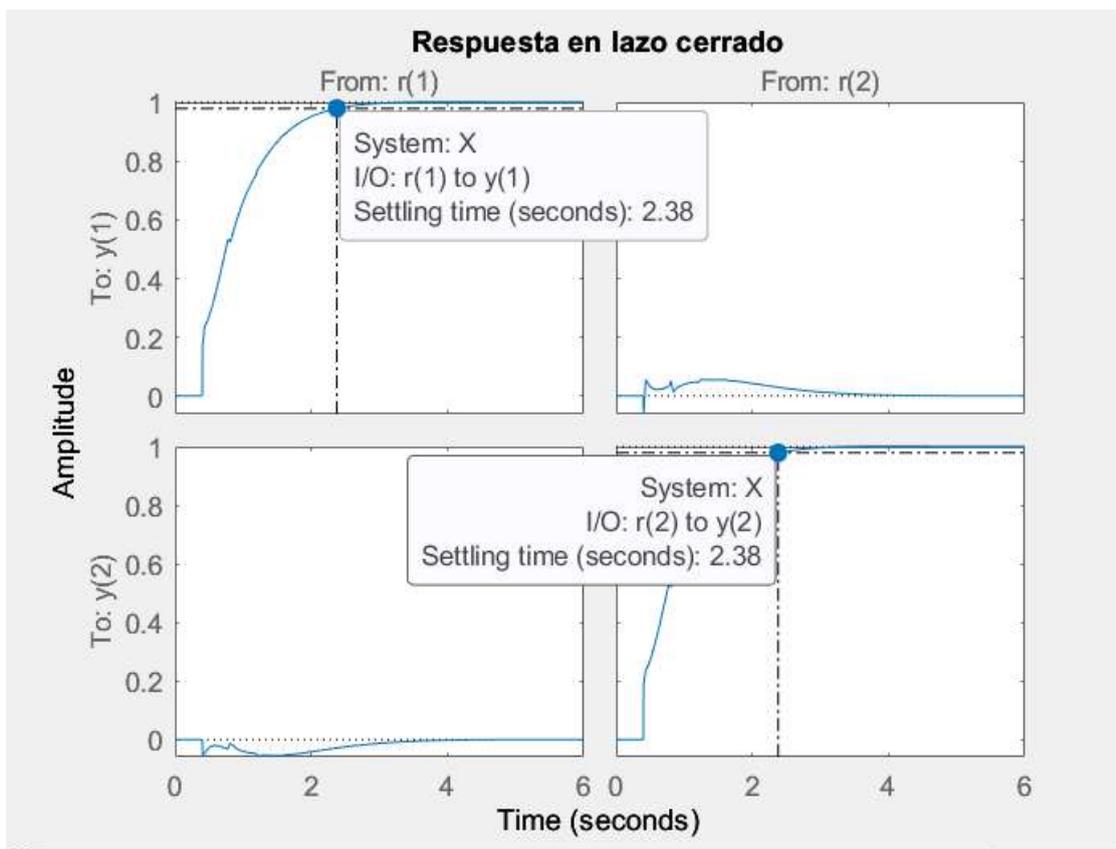
- CASO 8 - +250

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{22.89e^{-0.4s}}{4.572s + 500} & \frac{-11.64e^{-0.4s}}{1.807s + 500} \\ \frac{4.689e^{-0.4s}}{2.17s + 500} & \frac{5.8e^{-0.4s}}{1.801s + 500} \end{pmatrix}$$



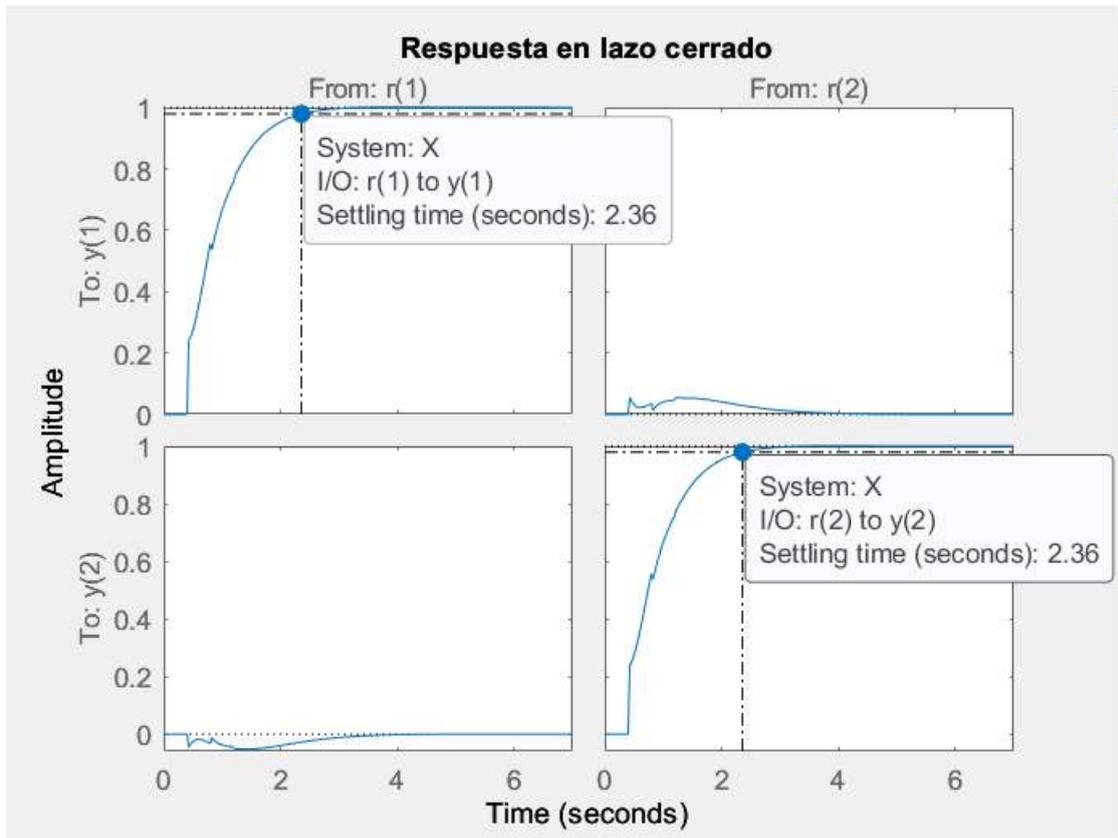
- CASO 9 - +750

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{22.89e^{-0.4s}}{4.572s + 750} & \frac{-11.64e^{-0.4s}}{1.807s + 750} \\ \frac{4.689e^{-0.4s}}{2.17s + 750} & \frac{5.8e^{-0.4s}}{1.801s + 750} \end{pmatrix}$$



- CASO 10 - +1000

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{22.89e^{-0.4s}}{4.572s + 1000} & \frac{-11.64e^{-0.4s}}{1.807s + 1000} \\ \frac{4.689e^{-0.4s}}{2.17s + 1000} & \frac{5.8e^{-0.4s}}{1.801s + 1000} \end{pmatrix}$$



ANEXO 3

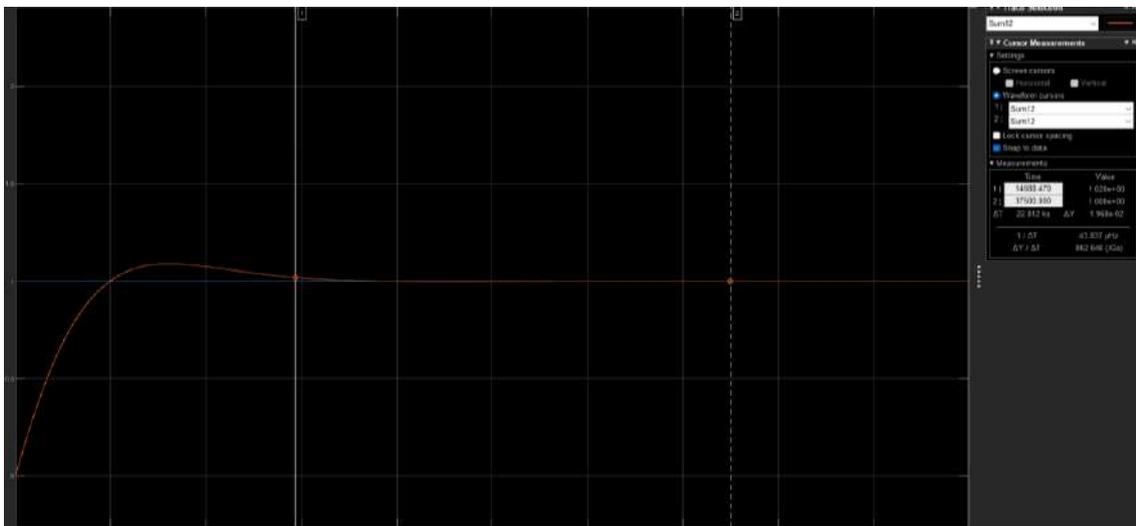
TOMA DE DATOS PLANTA 1 – SINTONIZACIÓN TRADICIONAL

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{-2.2e^{-s}}{7s + 1} & \frac{1.3e^{-s}}{7s + 1} \\ \frac{-2.8e^{-1.8s}}{9.5s + 1} & \frac{4.3e^{-1.05s}}{9.2s + 1} \end{pmatrix}$$

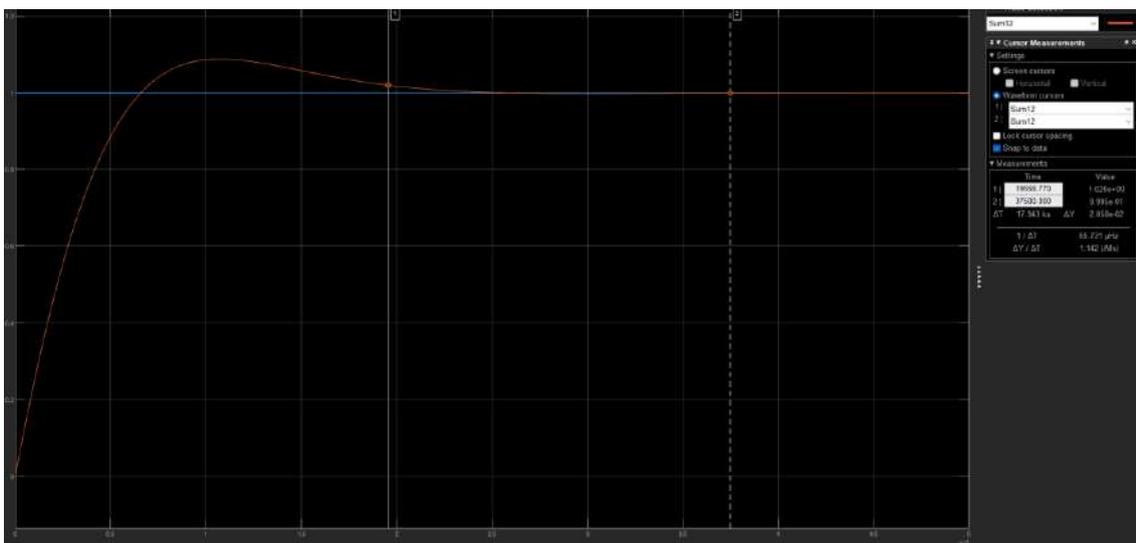
- CASO 1 - x1000

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{-2.2e^{-s}}{7000s + 1} & \frac{1.3e^{-s}}{7000s + 1} \\ \frac{-2.8e^{-1.8s}}{9500s + 1} & \frac{4.3e^{-1.05s}}{9200s + 1} \end{pmatrix}$$

Salida 1



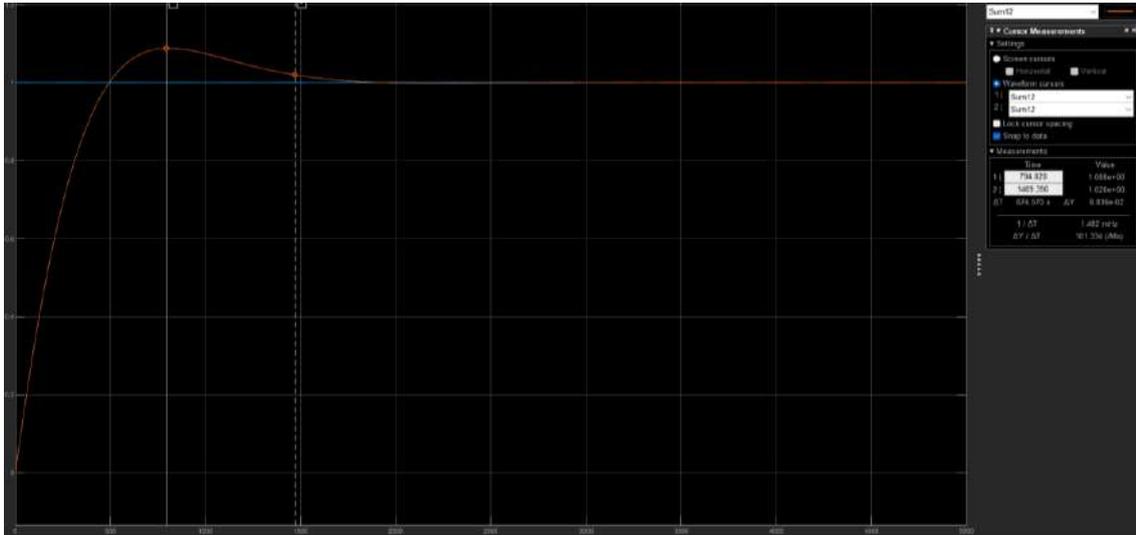
Salida 2



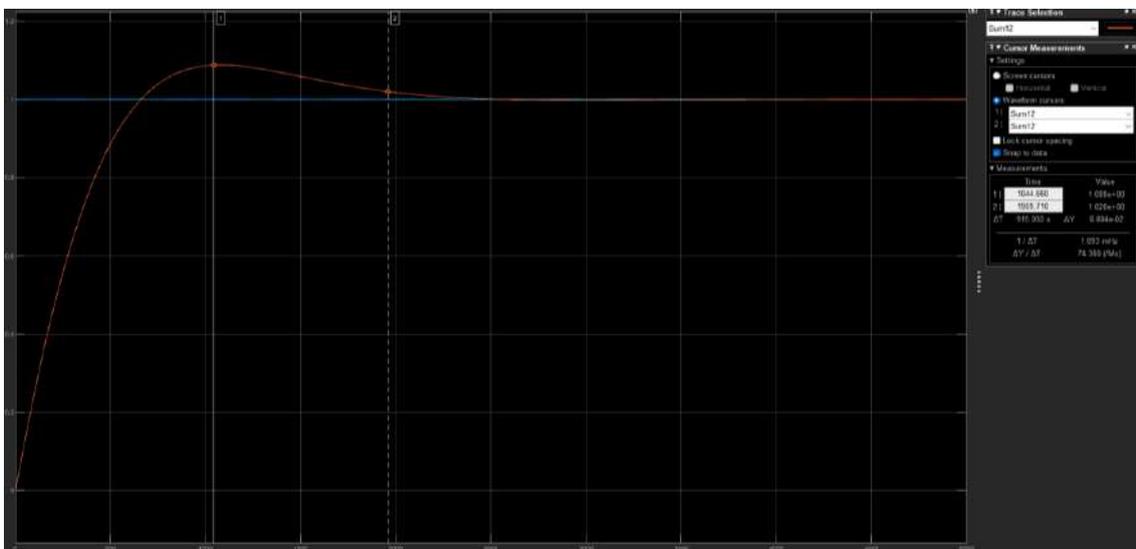
- CASO 2 – x100

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{-2.2e^{-s}}{700s + 1} & \frac{1.3e^{-s}}{700s + 1} \\ \frac{-2.8e^{-1.8s}}{950s + 1} & \frac{4.3e^{-1.05s}}{920s + 1} \end{pmatrix}$$

Salida 1



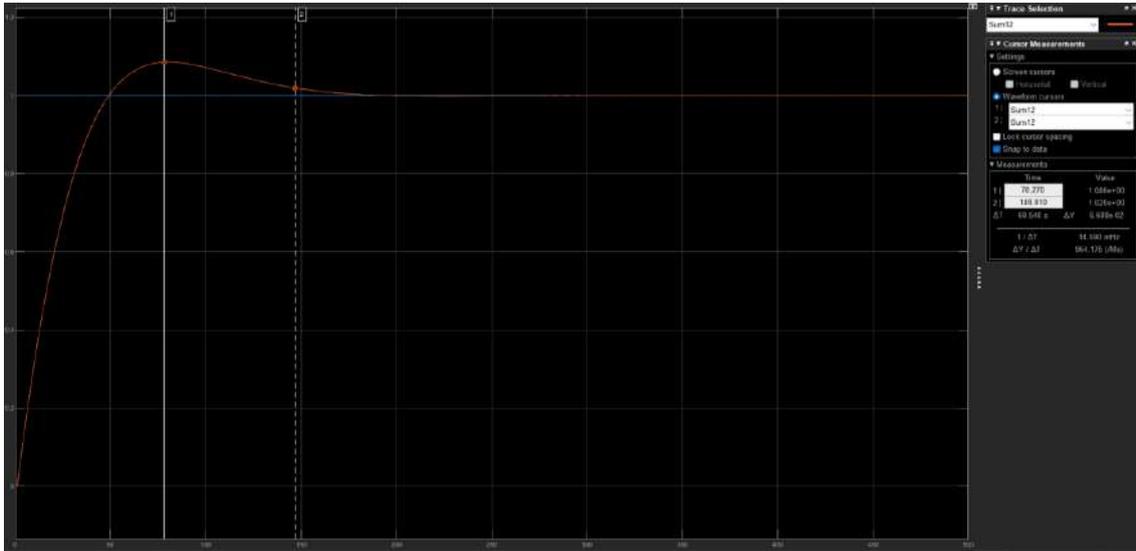
Salida 2



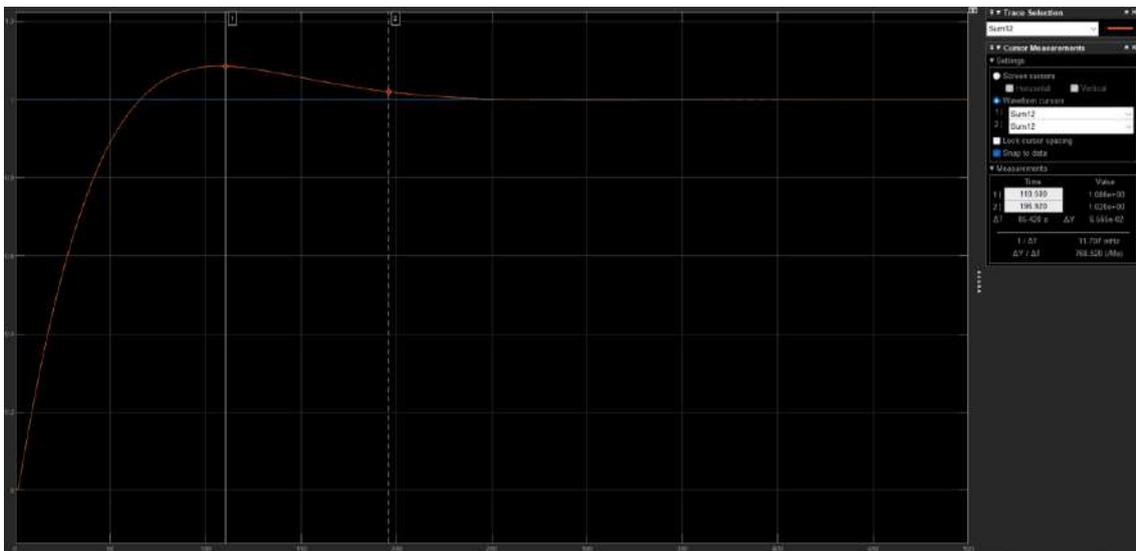
- CASO 3 – x10

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{-2.2e^{-s}}{70s + 1} & \frac{1.3e^{-s}}{70s + 1} \\ \frac{-2.8e^{-1.8s}}{95s + 1} & \frac{4.3e^{-1.05s}}{92s + 1} \end{pmatrix}$$

Salida 1



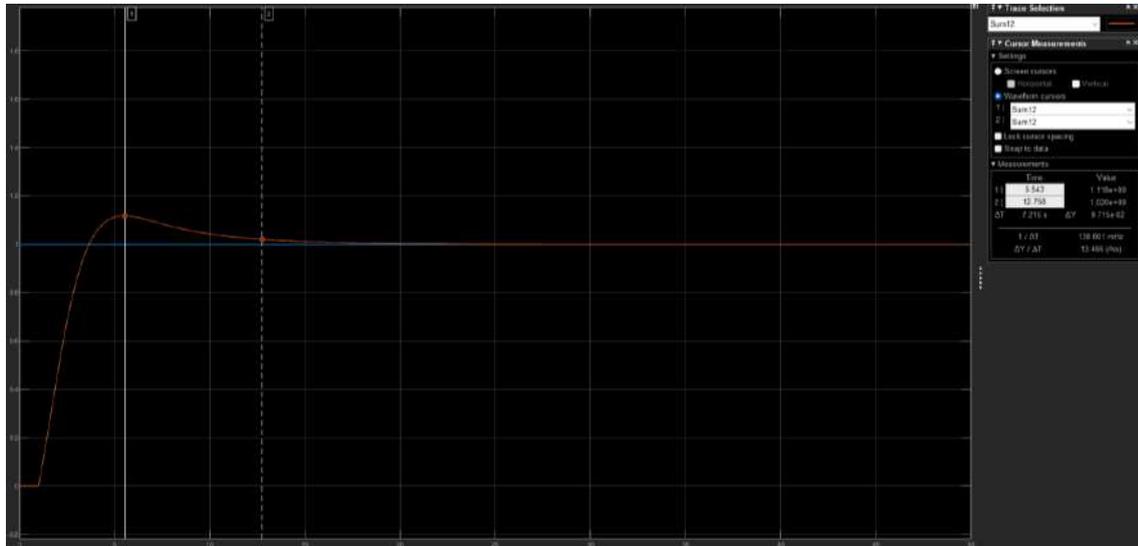
Salida 2



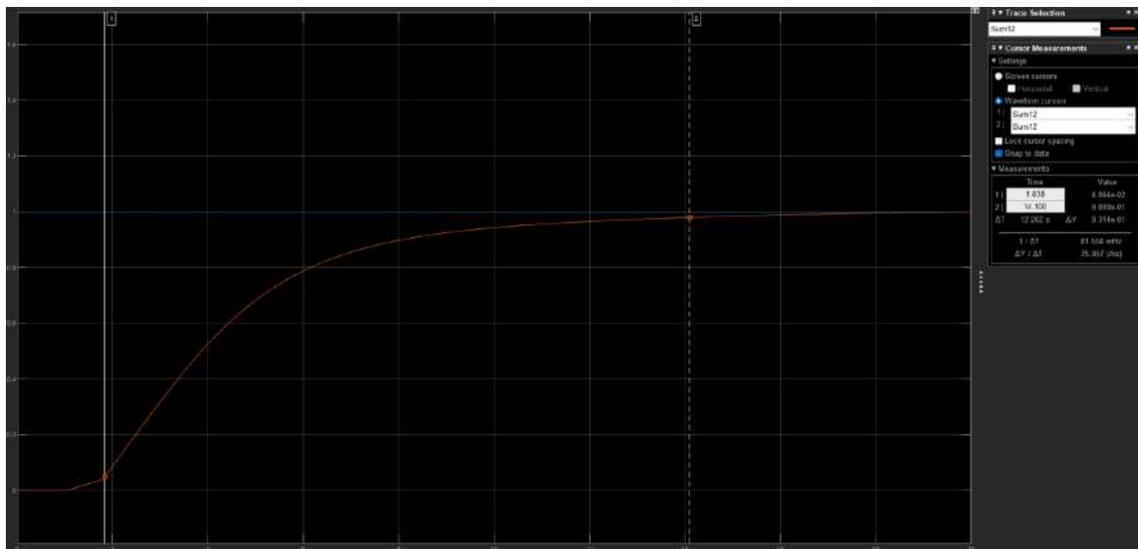
- CASO 4 – +1

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{-2.2e^{-s}}{7s + 1} & \frac{1.3e^{-s}}{7s + 1} \\ \frac{-2.8e^{-1.8s}}{9.5s + 1} & \frac{4.3e^{-1.05s}}{9.2s + 1} \end{pmatrix}$$

Salida 1



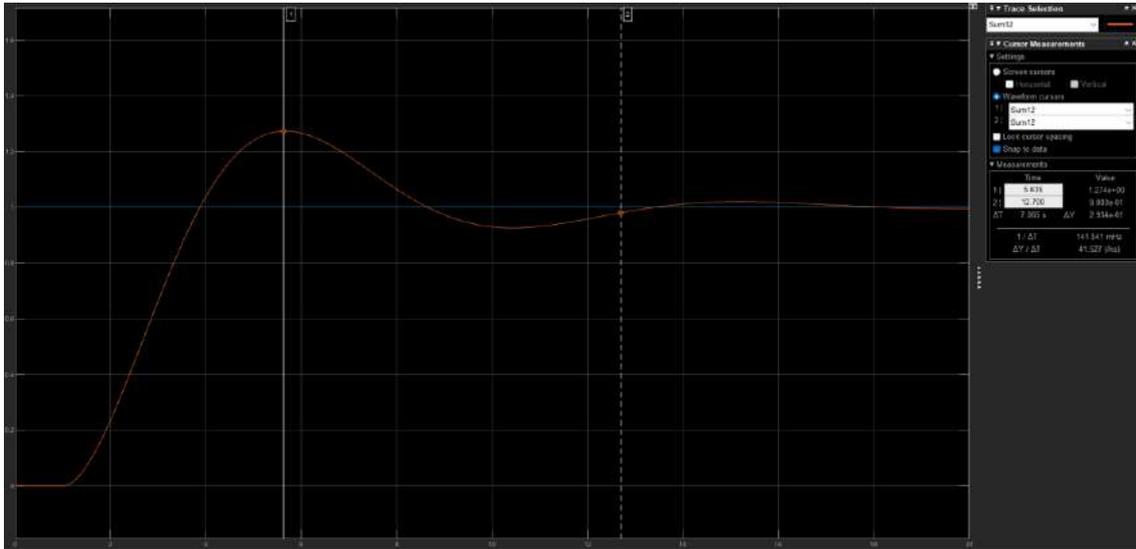
Salida 2



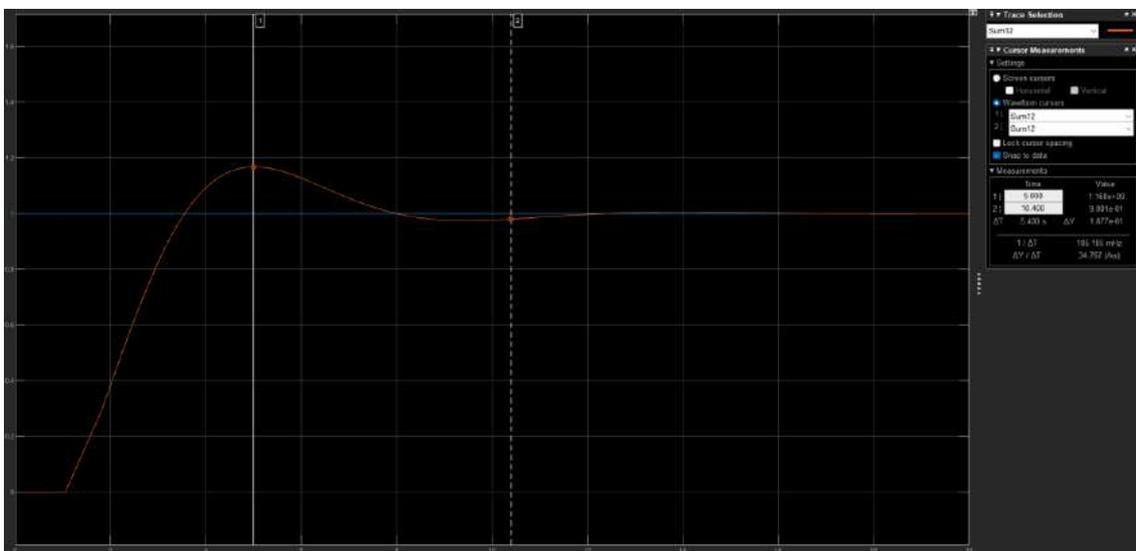
- CASO 5 - +10

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{-2.2e^{-s}}{7s + 10} & \frac{1.3e^{-s}}{7s + 10} \\ \frac{-2.8e^{-1.8s}}{9.5s + 10} & \frac{4.3e^{-1.05s}}{9.2s + 10} \end{pmatrix}$$

Salida 1



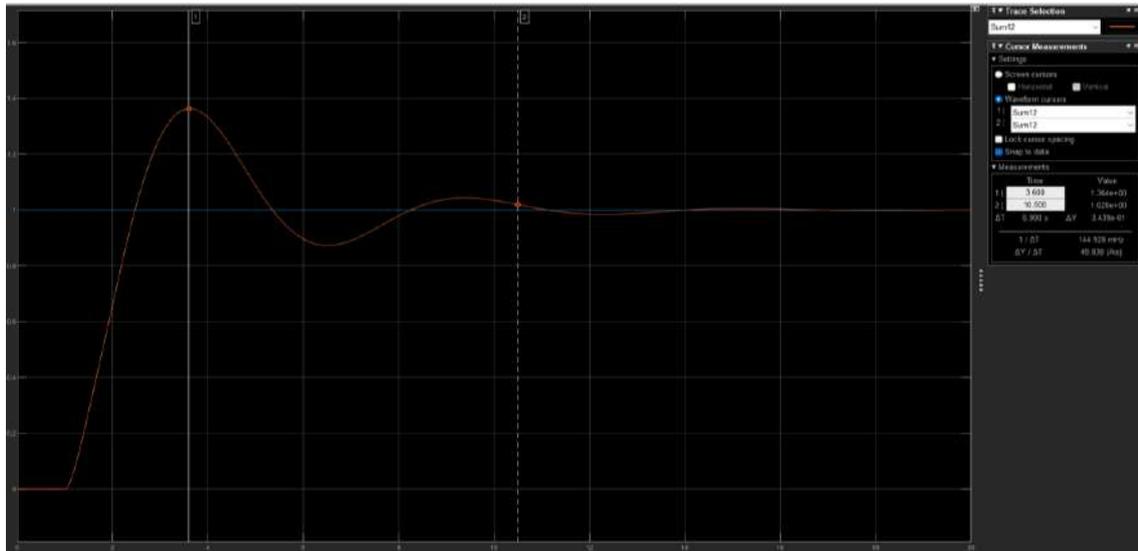
Salida 2



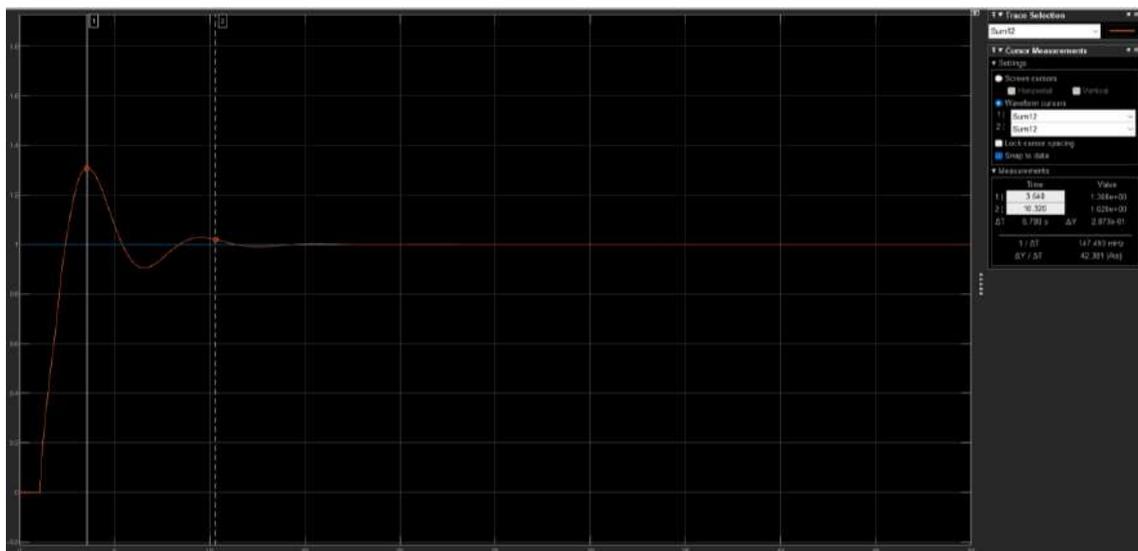
- CASO 6 - +50

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{-2.2e^{-s}}{7s + 50} & \frac{1.3e^{-s}}{7s + 50} \\ \frac{-2.8e^{-1.8s}}{9.5s + 50} & \frac{4.3e^{-1.05s}}{9.2s + 50} \end{pmatrix}$$

Salida 1



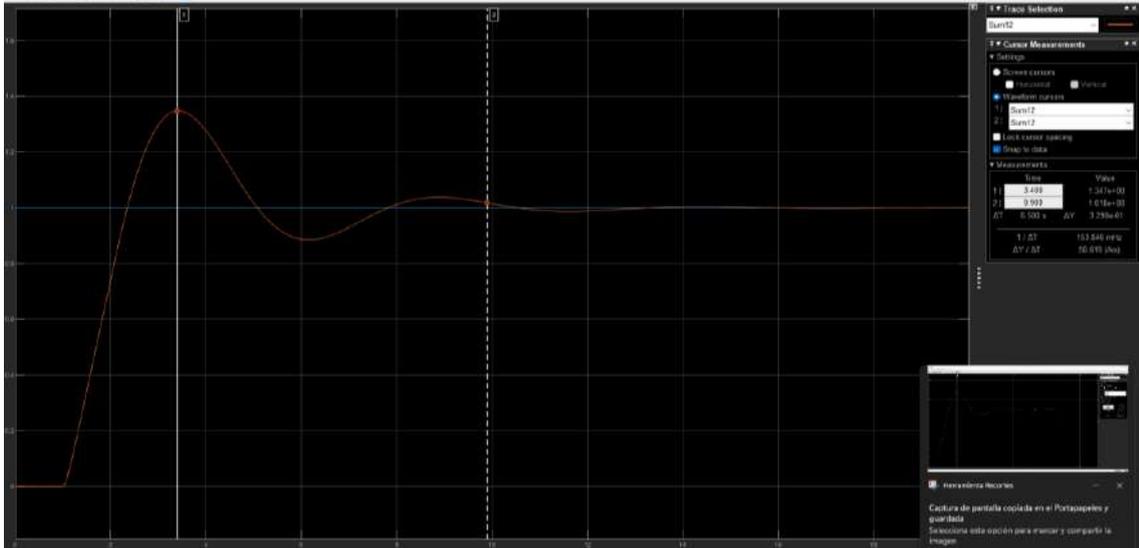
Salida 2



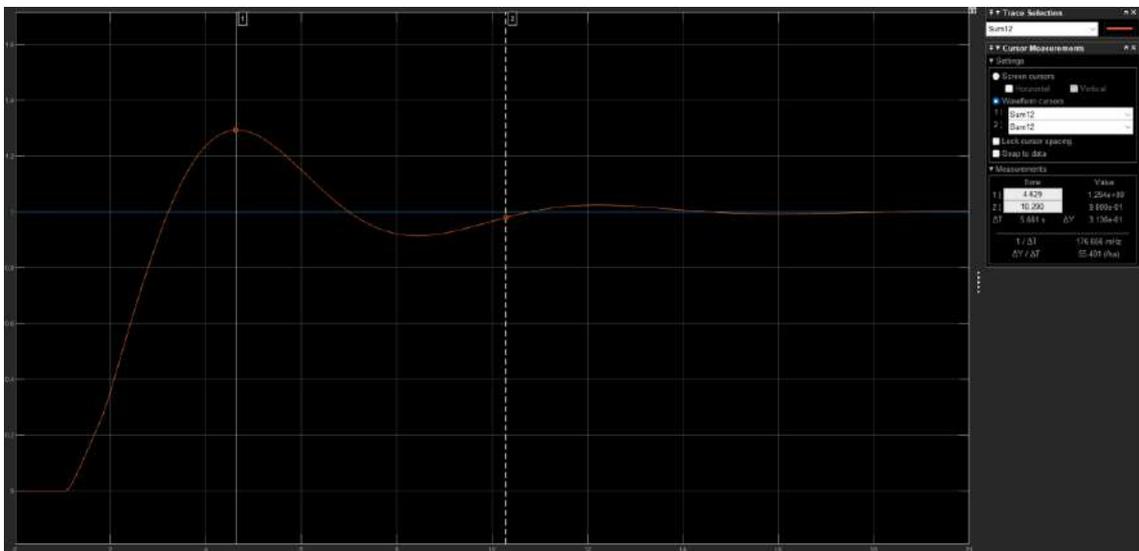
- CASO 7 - +100

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{-2.2e^{-s}}{7s + 100} & \frac{1.3e^{-s}}{7s + 100} \\ \frac{-2.8e^{-1.8s}}{9.5s + 100} & \frac{4.3e^{-1.05s}}{9.2s + 100} \end{pmatrix}$$

Salida 1



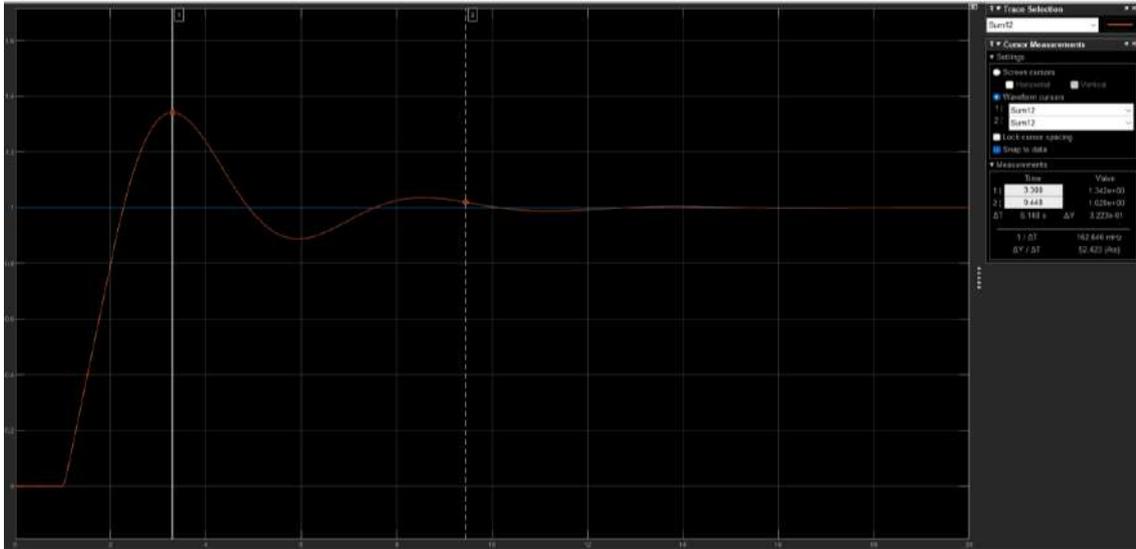
Salida 2



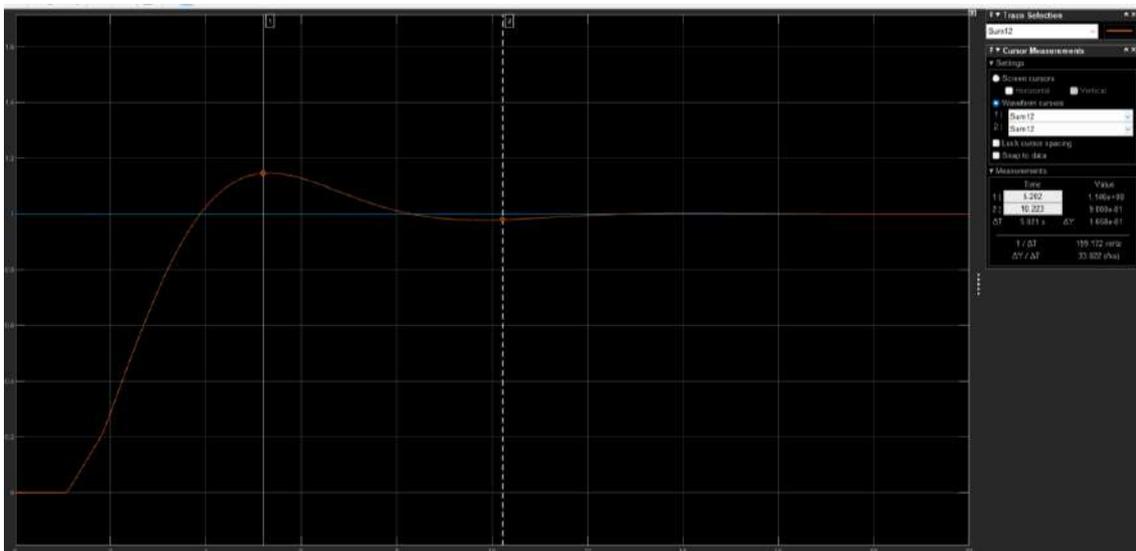
- CASO 8 – +250

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{-2.2e^{-s}}{7s + 250} & \frac{1.3e^{-s}}{7s + 250} \\ \frac{-2.8e^{-1.8s}}{9.5s + 250} & \frac{4.3e^{-1.05s}}{9.2s + 250} \end{pmatrix}$$

Salida 1



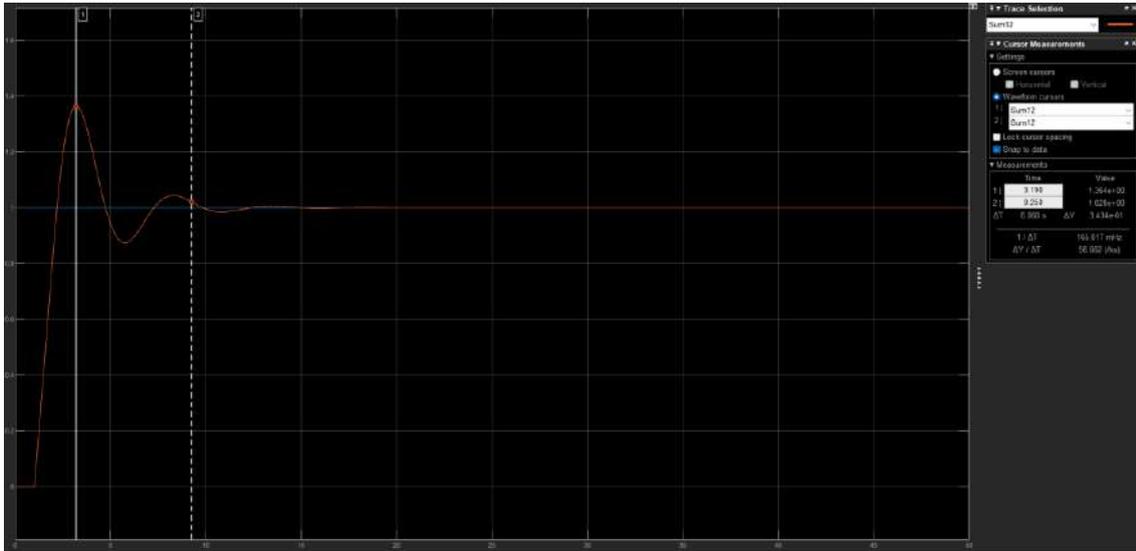
Salida 2



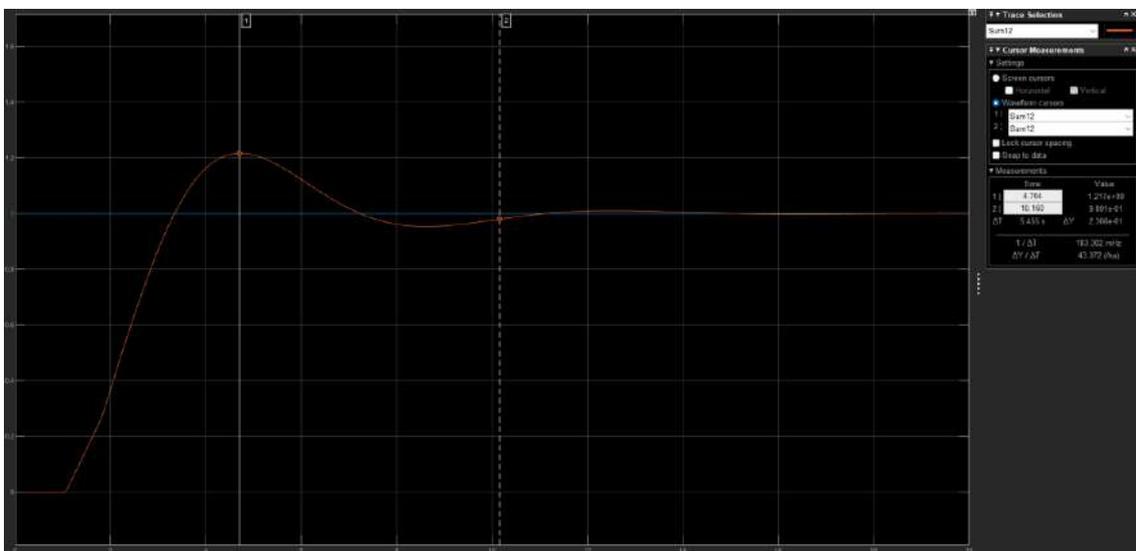
- CASO 9 - +750

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{-2.2e^{-s}}{7s + 750} & \frac{1.3e^{-s}}{7s + 750} \\ \frac{-2.8e^{-1.8s}}{9.5s + 750} & \frac{4.3e^{-1.05s}}{9.2s + 750} \end{pmatrix}$$

Salida 1



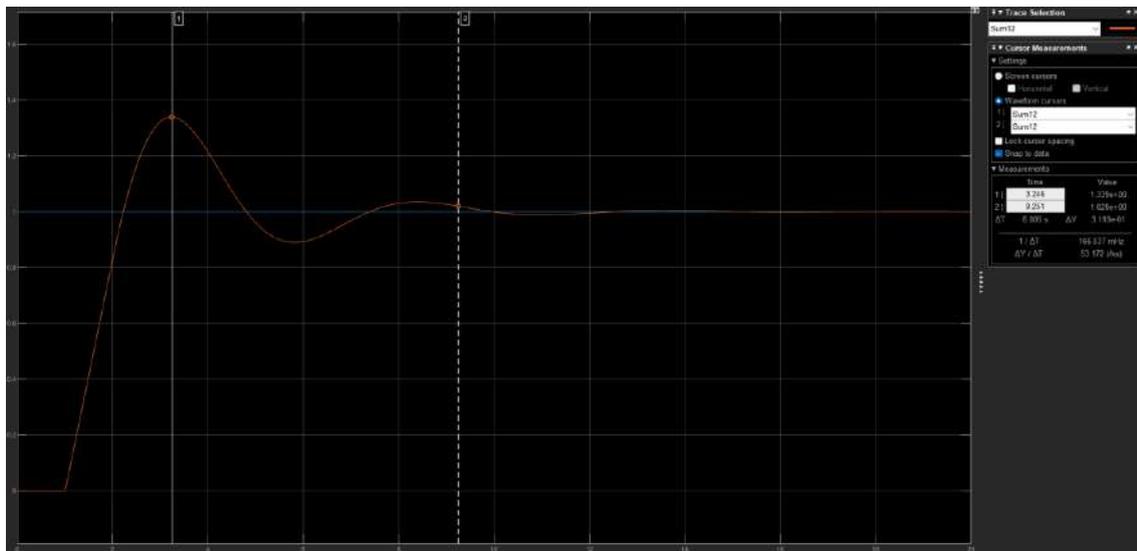
Salida 2



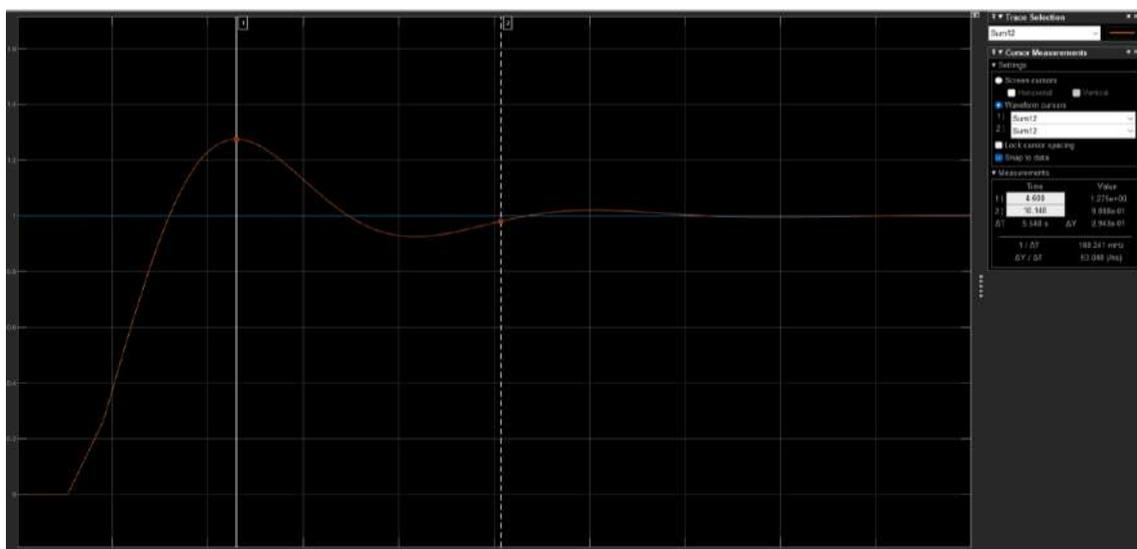
- CASO 10 - +1000

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{-2.2e^{-s}}{7s + 1000} & \frac{1.3e^{-s}}{7s + 1000} \\ \frac{-2.8e^{-1.8s}}{9.5s + 1000} & \frac{4.3e^{-1.05s}}{9.2s + 1000} \end{pmatrix}$$

Salida 1



Salida 2



ANEXO 4

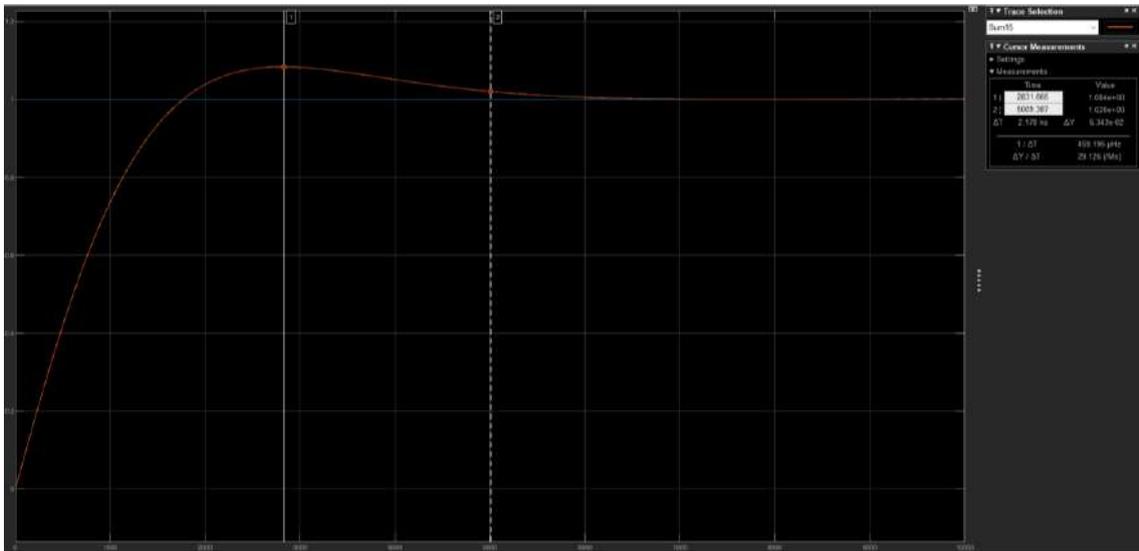
TOMA DE DATOS PLANTA 2 – SINTONIZACIÓN TRADICIONAL

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{22.89e^{-0.4s}}{4.572s + 1} & \frac{-11.64e^{-0.4s}}{1.807s + 1} \\ \frac{4.689e^{-0.4s}}{2.17s + 1} & \frac{5.8e^{-0.4s}}{1.801s + 1} \end{pmatrix}$$

- CASO 1 – x1000

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{22.89e^{-0.4s}}{4572s + 1} & \frac{-11.64e^{-0.4s}}{1807s + 1} \\ \frac{4.689e^{-0.4s}}{2170s + 1} & \frac{5.8e^{-0.4s}}{1801s + 1} \end{pmatrix}$$

Salida 1



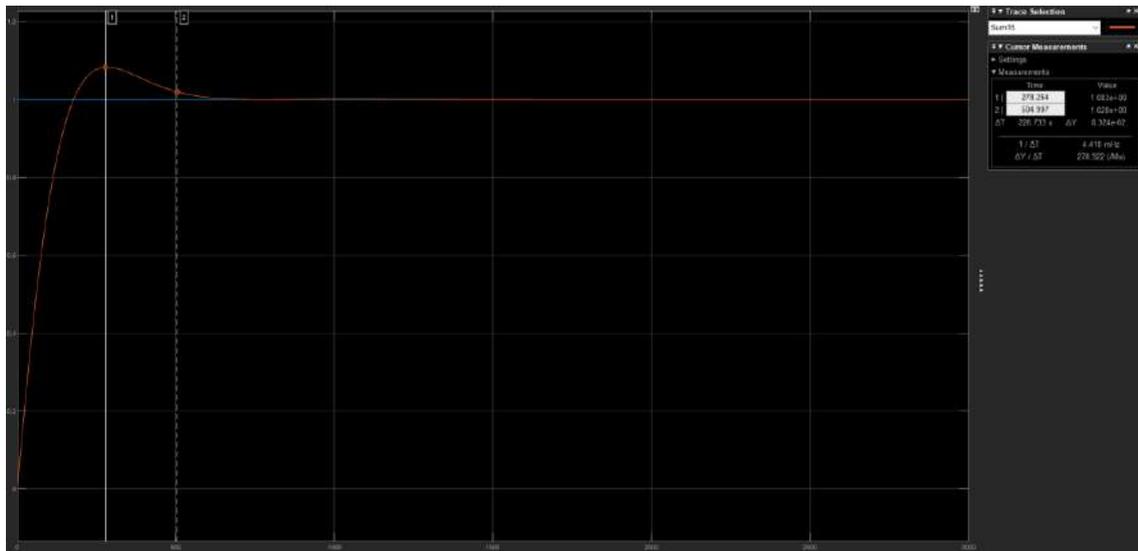
Salida 2



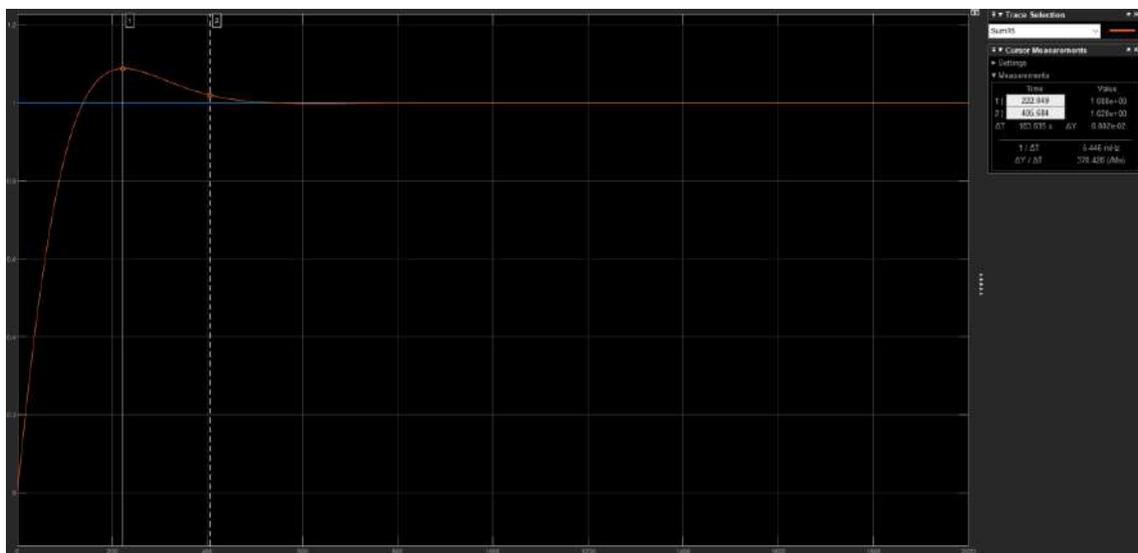
- CASO 2 – x100

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{22.89e^{-0.4s}}{457.2s + 1} & \frac{-11.64e^{-0.4s}}{180.7s + 1} \\ \frac{4.689e^{-0.4s}}{217s + 1} & \frac{5.8e^{-0.4s}}{180.1s + 1} \end{pmatrix}$$

Salida 1



Salida 2



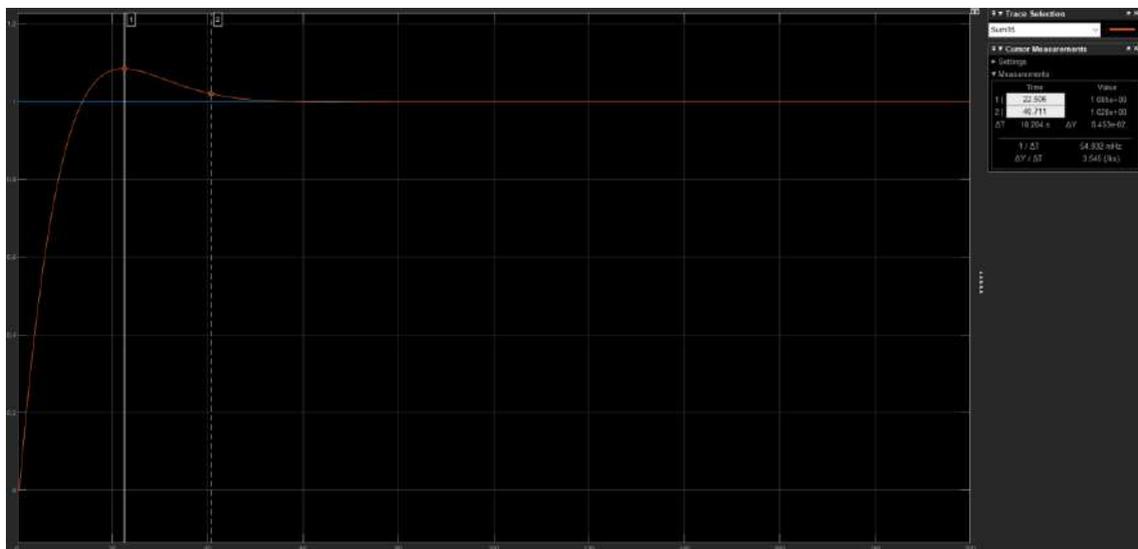
- CASO 3 – x10

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{22.89e^{-0.4s}}{45.72s + 1} & \frac{-11.64e^{-0.4s}}{18.07s + 1} \\ \frac{4.689e^{-0.4s}}{21.7s + 1} & \frac{5.8e^{-0.4s}}{18.01s + 1} \end{pmatrix}$$

Salida 1

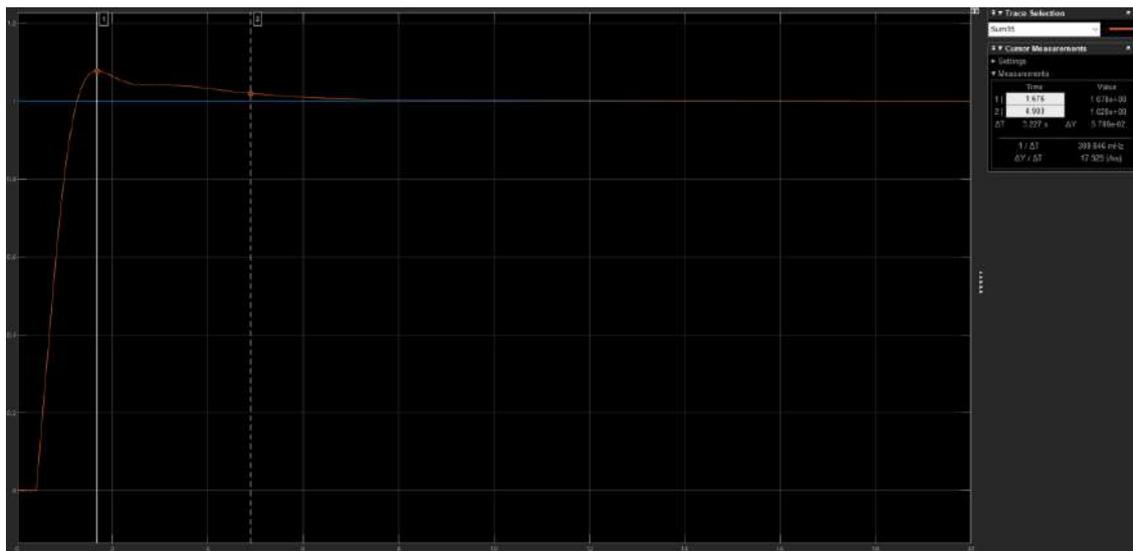


Salida 2



- CASO 4 – Planta sin variaciones

Salida 1



Salida 2



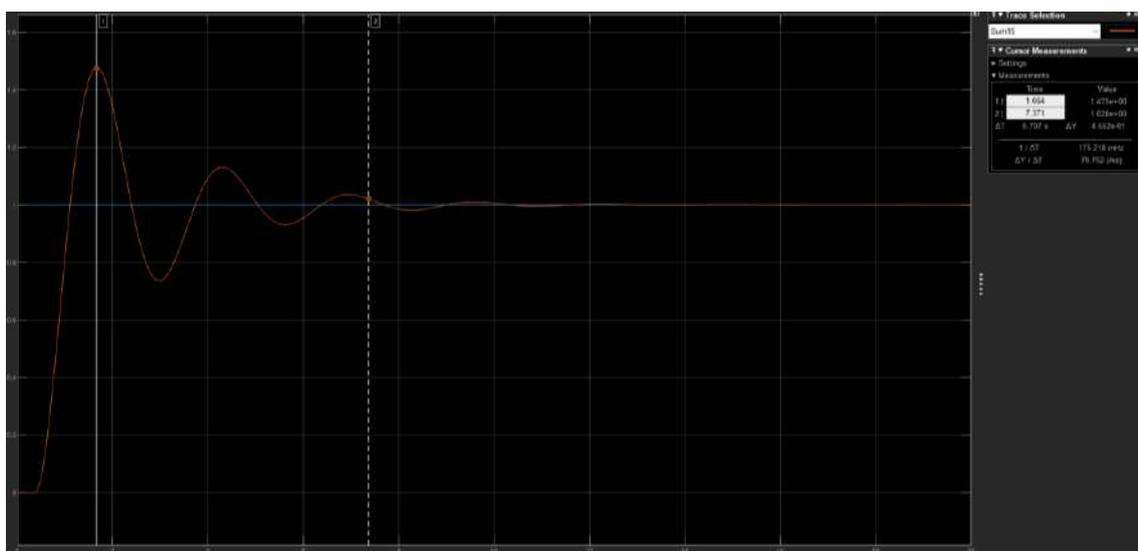
- CASO 5 – +10

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{22.89e^{-0.4s}}{4.572s + 10} & \frac{-11.64e^{-0.4s}}{1.807s + 10} \\ \frac{4.689e^{-0.4s}}{2.17s + 10} & \frac{5.8e^{-0.4s}}{1.801s + 10} \end{pmatrix}$$

Salida 1



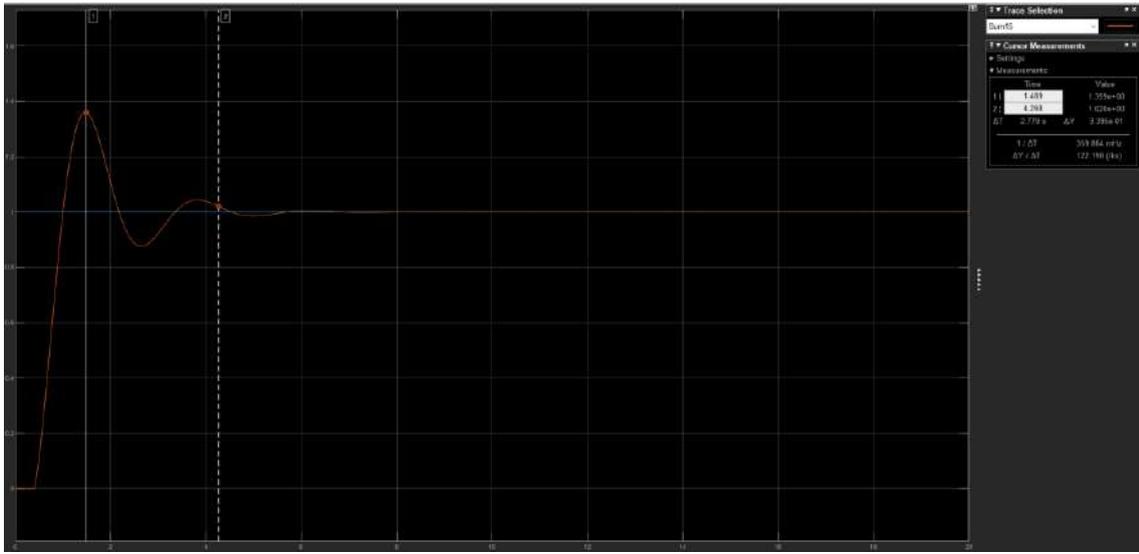
Salida 2



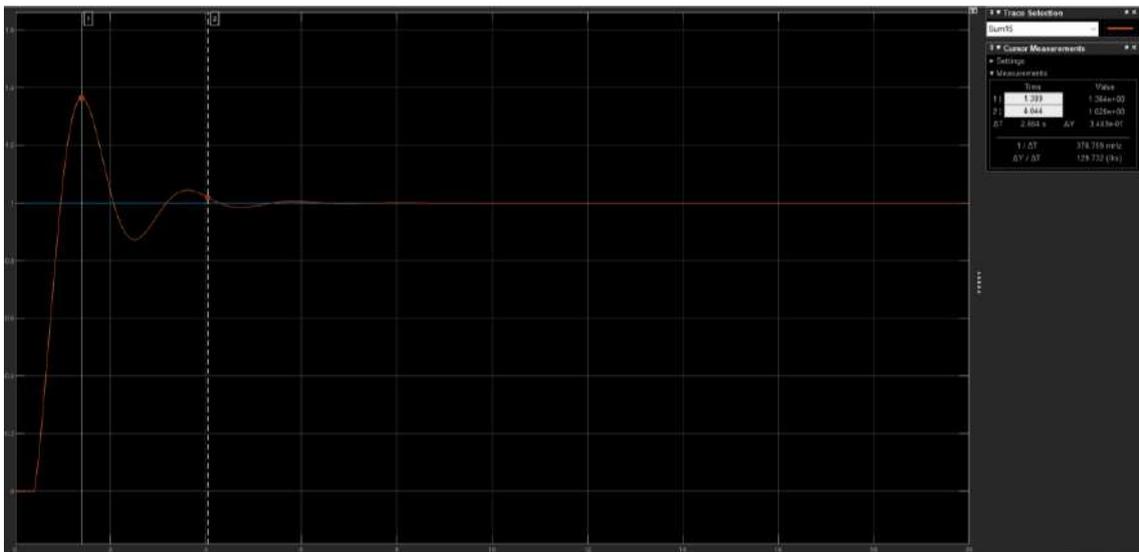
- CASO 6 - +50

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{22.89e^{-0.4s}}{4.572s + 50} & \frac{-11.64e^{-0.4s}}{1.807s + 50} \\ \frac{4.689e^{-0.4s}}{2.17s + 50} & \frac{5.8e^{-0.4s}}{1.801s + 50} \end{pmatrix}$$

Salida 1



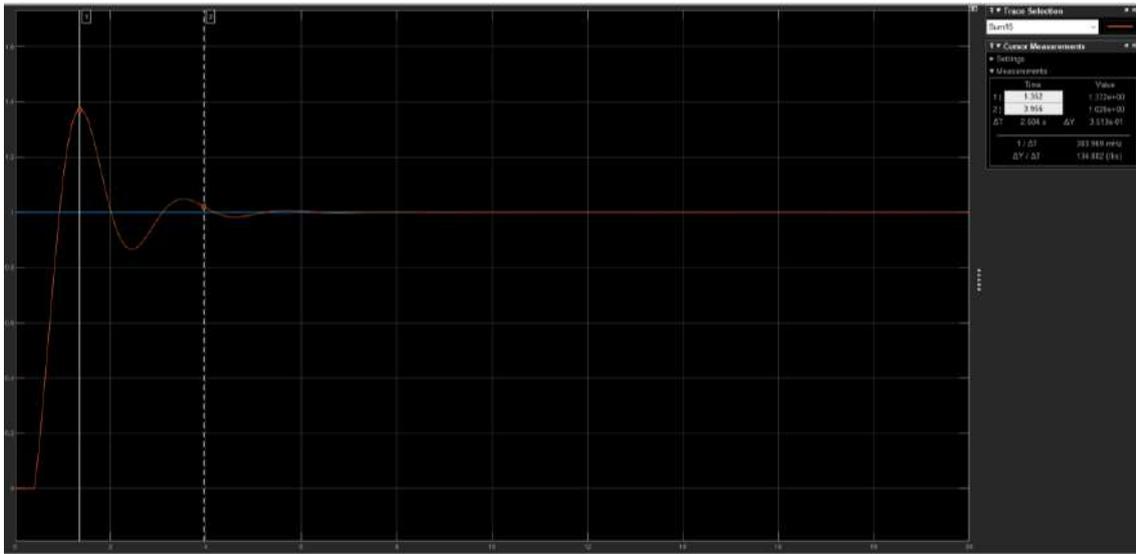
Salida 2



- CASO 7 - +100

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{22.89e^{-0.4s}}{4.572s + 100} & \frac{-11.64e^{-0.4s}}{1.807s + 100} \\ \frac{4.689e^{-0.4s}}{2.17s + 100} & \frac{5.8e^{-0.4s}}{1.801s + 100} \end{pmatrix}$$

Salida 1



Salida 2



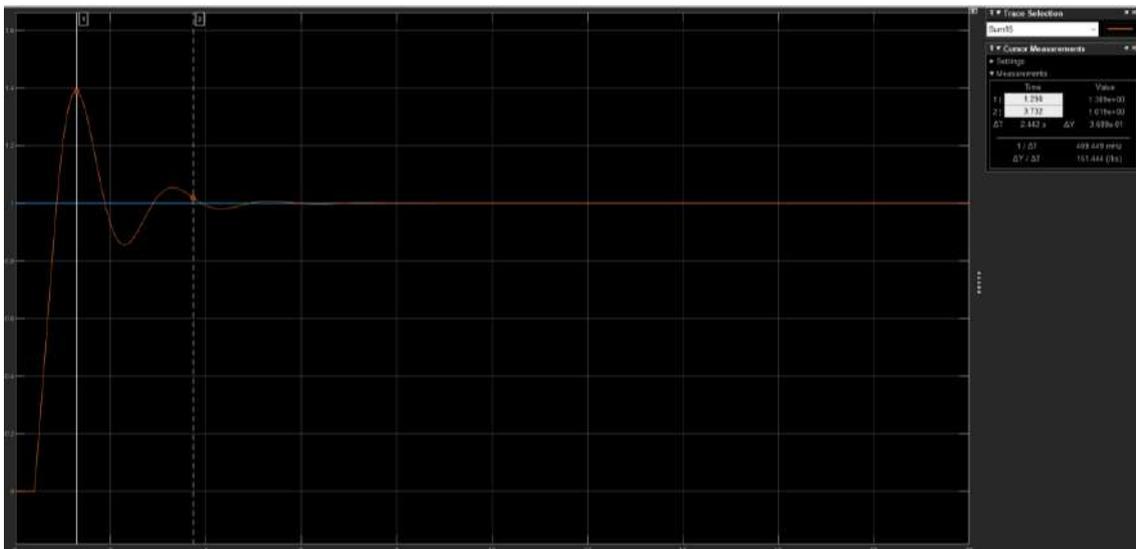
- CASO 8 - +250

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{22.89e^{-0.4s}}{4.572s + 250} & \frac{-11.64e^{-0.4s}}{1.807s + 250} \\ \frac{4.689e^{-0.4s}}{2.17s + 250} & \frac{5.8e^{-0.4s}}{1.801s + 250} \end{pmatrix}$$

Salida 1



Salida 2



- CASO 9 - +750

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{22.89e^{-0.4s}}{4.572s + 750} & \frac{-11.64e^{-0.4s}}{1.807s + 750} \\ \frac{4.689e^{-0.4s}}{2.17s + 750} & \frac{5.8e^{-0.4s}}{1.801s + 750} \end{pmatrix}$$

Salida 1



Salida 2



- CASO 10 - +1000

$$G_{VL}^N(s) = \begin{pmatrix} \frac{22.89e^{-0.4s}}{4.572s + 1000} & \frac{-11.64e^{-0.4s}}{1.807s + 1000} \\ \frac{4.689e^{-0.4s}}{2.17s + 1000} & \frac{5.8e^{-0.4s}}{1.801s + 1000} \end{pmatrix}$$

Salida 1



Salida 2



ANEXO 5

CÓDIGO MATLAB PARA MÉTODO DE SINTONIZACIÓN MEDIANTE LMI

Prerrequisitos:

Este método usa las librerías para MATLAB de YALMIP para hacer la programación convexa con LMI's, como sdpt3 que sirve para programación semidefinida, SEDUMI que es un solver de programación semidefinida.

<https://yalmip.github.io/solver/sdpt3/>

<https://github.com/SQLP/SeDuMi>

<https://github.com/sqlp/sdpt3>

Además, se usa la función realizada por Daniel Rubin, 14-Nov-2017, que hace referencia a lo usado en (Boyd et al., 2016).

<https://github.com/rubindan/mimoPIDtune>

Código:

Código usado para la sintonización de LMI. Fuente: Elaboración Propia.

```
% Autotune a MIMO PID for the nominal case by LMIs
% [S. Boyd, M. Hast, and J. Astrom, "MIMO PID tuning via iterated LMI
% restriction", Inter. Jur. of Robust & Nonlinear Control, 2016.]

clc
clear variables

%addlib yalmip sdpt3
s = tf('s');
% %PLANTA 1-----
% num = {-2.2, 1.3; -2.8, 4.3};
% den = {[7 50], [7 50]; [9.5 50], [9.2 50]};
% P = tf(num,den,'IODelay',[1 1; 1.8 1.05]);
% %-----
%PLANTA 2-----
% num = {22.89, -11.64; 4.689, 5.80};
% den = {[4572 1], [1807 1]; [2174 1], [1801 1]};
% P = tf(num,den,'IODelay',[0.4 0.4; 0.4 0.4]);
% %-----

N = 10;
w = logspace(-6,6,N);
P0 = dcgain(P);

tau=0.1;

% -----
% specs:
% sensitivity (4db)
Smax = 1.6*ones(1,N); %rango variable 1.1-1.6
% low frequency sensitivity (4db)
Tmax = 1.2*ones(1,N); %rango variable 1.1-1.6
% cost of feedback
Qmax = 3/min(svd(dcgain(P)))*ones(1,N); %rango variable 3-10
% Option.Structure.Kp=[1 0 ; 0 1]; ***
Option=[];

C = auto_mimo_pid(P,w,Smax,Tmax,Qmax,tau,Option);
C.InputName = 'e';
C.OutputName = 'salida_pid_mimo';
```

```

P.InputName = 'salida_pid_mimo';
P.OutputName = 'y';

sum1 = sumblk('e = r - y',2);

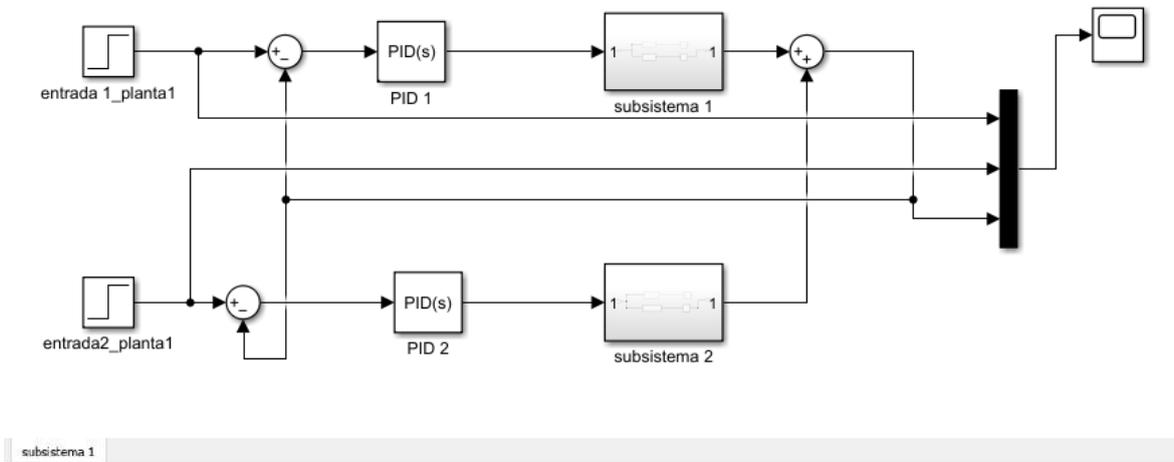
X = connect(C,P,sum1,'r','y');

L = P*C
S = (eye(2)+P*C)^-1;
T = P*C*S;
Q = C*S;
figure(1), step(X), title('Respuesta en lazo cerrado');
% figure(2), step(S), title('S: Sensitivity performance');
% figure(3), step(T), title('T: C. Sensitivity robustness and avoid noise');
% figure(4), step(Q), title('Q: penalize large inputs');
%% %% %% analysis
%% L=frd(P*C,w);
%% S=(eye(2)+P*C)^-1;
%% T=P*C*S;
%% Q=C*S; %funcion de sensibilidad de control, describe el comportamiento de
%% la accion de control en funcion de la referencia |Q(jw)| permite
%% determinar la intensidad de la accion de control o referencias a
%% distintas frecuencias,
% figure(5), sigma(S,w); hold on; semilogx(w,20*log10(Smax),'r');
% figure(6), sigma(T,w); hold on; semilogx(w,20*log10(Tmax),'r');
% figure(7), sigma(Q,w); hold on; semilogx(w,20*log10(Qmax),'r');

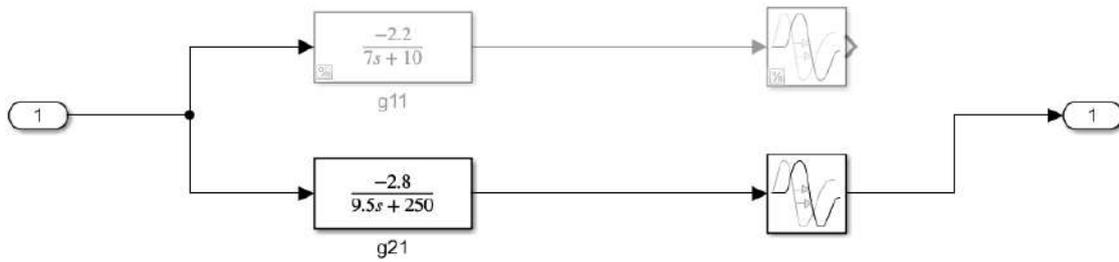
```

ANEXO 6

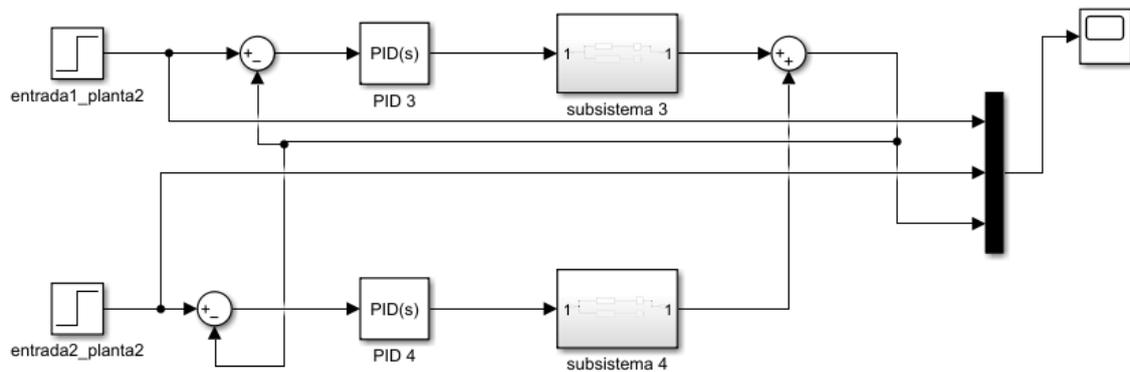
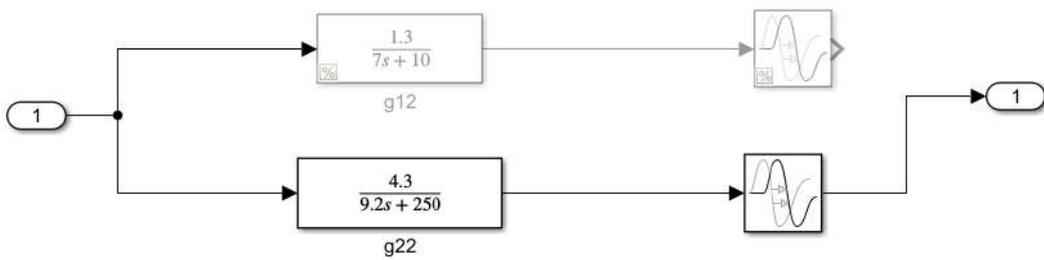
DIAGRAMA SIMULINK PARA SINTONIZACIÓN DE PID DE MANERA CLÁSICA

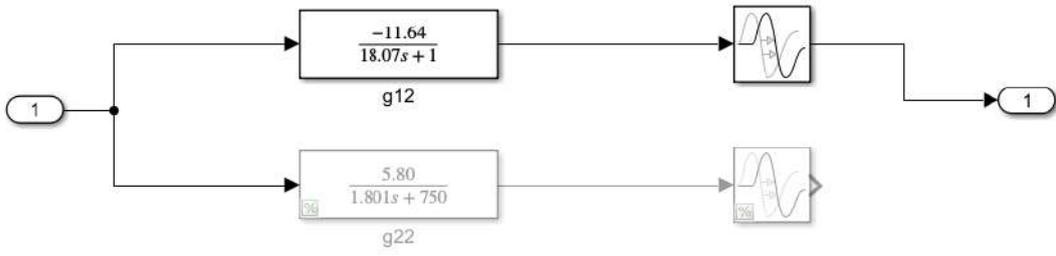
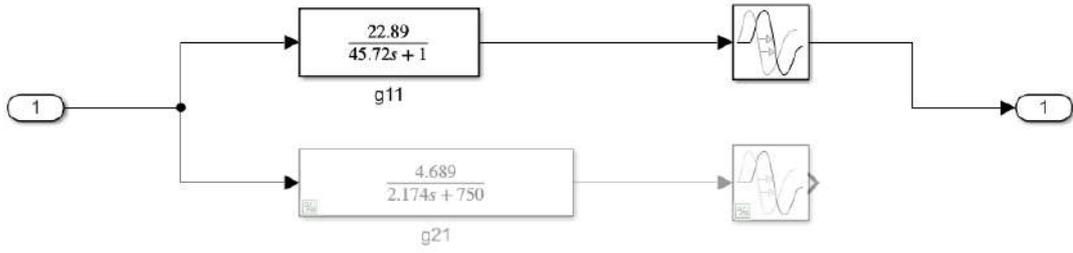


subistema 1



subistema 2





ANEXO 7

Tabla tstudent para extraer valores críticos en base a los grados de libertad (gl)

y valor de significancia(α)

g.d.l	área a la derecha de t								
	0,0005	0,0025	0,005	0,0075	0,01	0,015	0,02	0,025	0,05
1	636,619	127,321	63,657	42,433	31,821	21,205	15,895	12,706	6,314
2	31,599	14,089	9,925	8,073	6,965	5,643	4,849	4,303	2,920
3	12,924	7,453	5,841	5,047	4,541	3,896	3,482	3,182	2,353
4	8,610	5,598	4,604	4,088	3,747	3,298	2,999	2,776	2,132
5	6,869	4,773	4,032	3,634	3,365	3,003	2,757	2,571	2,015
6	5,959	4,317	3,707	3,372	3,143	2,829	2,612	2,447	1,943
7	5,408	4,029	3,499	3,203	2,998	2,715	2,517	2,365	1,895
8	5,041	3,833	3,355	3,085	2,896	2,634	2,449	2,306	1,860
9	4,781	3,690	3,250	2,998	2,821	2,574	2,398	2,262	1,833
10	4,587	3,581	3,169	2,932	2,764	2,527	2,359	2,228	1,812
11	4,437	3,497	3,106	2,879	2,718	2,491	2,328	2,201	1,796
12	4,318	3,428	3,055	2,836	2,681	2,461	2,303	2,179	1,782
13	4,221	3,372	3,012	2,801	2,650	2,436	2,282	2,160	1,771
14	4,140	3,326	2,977	2,771	2,624	2,415	2,264	2,145	1,761
15	4,073	3,286	2,947	2,746	2,602	2,397	2,249	2,131	1,753
16	4,015	3,252	2,921	2,724	2,583	2,382	2,235	2,120	1,746
17	3,965	3,222	2,898	2,706	2,567	2,368	2,224	2,110	1,740
18	3,922	3,197	2,878	2,689	2,552	2,356	2,214	2,101	1,734
19	3,883	3,174	2,861	2,674	2,539	2,346	2,205	2,093	1,729
20	3,850	3,153	2,845	2,661	2,528	2,336	2,197	2,086	1,725
21	3,819	3,135	2,831	2,649	2,518	2,328	2,189	2,080	1,721
22	3,792	3,119	2,819	2,639	2,508	2,320	2,183	2,074	1,717
23	3,768	3,104	2,807	2,629	2,500	2,313	2,177	2,069	1,714
24	3,745	3,091	2,797	2,620	2,492	2,307	2,172	2,064	1,711
25	3,725	3,078	2,787	2,612	2,485	2,301	2,167	2,060	1,708
26	3,707	3,067	2,779	2,605	2,479	2,296	2,162	2,056	1,706
27	3,690	3,057	2,771	2,598	2,473	2,291	2,158	2,052	1,703
28	3,674	3,047	2,763	2,592	2,467	2,286	2,154	2,048	1,701
29	3,659	3,038	2,756	2,586	2,462	2,282	2,150	2,045	1,699
30	3,646	3,030	2,750	2,581	2,457	2,278	2,147	2,042	1,697
31	3,633	3,022	2,744	2,576	2,453	2,275	2,144	2,040	1,696
32	3,622	3,015	2,738	2,571	2,449	2,271	2,141	2,037	1,694
33	3,611	3,008	2,733	2,566	2,445	2,268	2,138	2,035	1,692
34	3,601	3,002	2,728	2,562	2,441	2,265	2,136	2,032	1,691
35	3,591	2,996	2,724	2,558	2,438	2,262	2,133	2,030	1,690
40	3,551	2,971	2,704	2,542	2,423	2,250	2,123	2,021	1,684
60	3,460	2,915	2,660	2,504	2,390	2,223	2,099	2,000	1,671
80	3,416	2,887	2,639	2,486	2,374	2,209	2,088	1,990	1,664
90	3,402	2,878	2,632	2,480	2,368	2,205	2,084	1,987	1,662
100	3,390	2,871	2,626	2,475	2,364	2,201	2,081	1,984	1,660
120	3,373	2,860	2,617	2,468	2,358	2,196	2,076	1,980	1,658
inf.	3,291	2,807	2,576	2,432	2,326	2,170	2,054	1,960	1,645